Exercices et lectures sur les fonctions elliptiques (préparation à l'agrégation des sciences mathématiques)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 66-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__66_0>

[F]

EXERCICES ET LECTURES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES (PRÉPARATION A L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES);

NOTES RÉUNIES PAR M. A. B.

---

1. Trouver les périodes principales du réseau dérivé des deux périodes $2+26i$ et $1+15i$.

(C. JORDAN, *Conf. de l'École Polytechn.*)

2. Représenter par des graphiques en perspective cavalière l'ensemble des valeurs réelles de pu dans le cas du discriminant positif et dans le cas du discriminant négatif.

3. Construire la courbe $y = \zeta x$, les invariants g_2 et g_3 étant réels.

4. La surface

$$\operatorname{tn} y \operatorname{tn} z + \operatorname{tn} z \operatorname{tn} x + \operatorname{tn} x \operatorname{tn} y + 3 = 0$$

$\left(\text{où } \operatorname{tn} u = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \text{ et } k = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)$ est une surface minima.

(GREENHILL, *Fonct. ellipt.*, p. 37.)

5. *Arrière-voussure de Saint-Antoine.* — On donne une ellipse dont un axe OC est vertical, et un rectangle horizontal dont les côtés opposés MN, PQ ont respectivement pour milieux les extrémités B et B' de l'axe horizontal de l'ellipse; la surface de l'arrière-voussure est engendrée par une ellipse variable dont le plan reste normal à la droite BB' et dont les sommets sont les points où ce plan rencontre l'ellipse BOC et les côtés opposés MQ et NP du rectangle :

1° Déterminer les asymptotiques de cette surface;

2° Rapporter la surface à ses asymptotiques.

Prenant pour axe des x la droite OB, pour axe des z la droite OC (axes rectangulaires), et posant : $BB' = 2a$, MN $= 2b$, OC $= c$, on a

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{a}{2}\left(\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} v} + \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{cn} u}\right) \\ y &= \pm \frac{b}{2}\left(\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} u} + \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} v}\right) \\ z &= \pm \frac{c}{4}\,\frac{(\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 v)^2}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v} \end{aligned}\right\} \quad \left(k = \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

les asymptotiques étant les lignes $u =$ const. et $v =$ const.

[E. Rouché, *Sur les lignes asymptotiques d'une surface du quatrième degré* (*Comptes rendus*, t. LXXXIV).]

(L'intéressant calcul qui conduit au résultat énoncé n'a jamais été publié.)

6. Soit $f(z)$ une fonction elliptique du second ordre dont l'une des périodes est 2ω. Les n quantités

$$f(z), \quad f\left(z + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \ldots, \quad f\left(z + \frac{n-1}{n}\,2\omega\right)$$

sont racines d'une équation en θ de la forme

$$P(\theta) + \lambda(z)\,Q(\theta) = 0,$$

$P(\theta)$ et $Q(\theta)$ désignant deux polynomes de degré n à coefficients constants.

(R. Bricard, *Société math. de France*, t. XXVI, 1898, p. 92.)

Ce théorème est susceptible d'applications géométriques.

(*Ibid.*, p. 96.)

7. Toute fonction elliptique d'ordre n, $f(u)$ est représentable par le quotient de deux expressions de la forme

$$a_0 + a_1\,p(u+h) + a_2\,p'(u+h) + \ldots + a_{n-1}\,p^{(n-2)}(u+h),$$

h et les a_i désignant des constantes convenables.

Ce mode de représentation est valable, que les zéros ou les pôles de $f(u)$ soient distincts ou non.

[P. Painlevé, *Sur la représentation des fonctions elliptiques* (*Société math. de France*, t. XXVII, déc. 1899, p. 300).]

8. Appliquer le théorème de M. Painlevé à l'établissement de la formule

$$\frac{p'u - p'v}{pu - pv} + \text{const.}$$
$$= \frac{2p'\frac{v}{2}}{p\left(u_0+\frac{v}{2}\right) - p\left(\frac{v}{2}\right)} \; \frac{p\left(u+\frac{v}{2}\right) - p\left(u_0+\frac{v}{2}\right)}{p\left(u+\frac{v}{2}\right) - p\left(\frac{v}{2}\right)},$$

où u_0 désigne un zéro du premier membre.

Cette formule a été utilisée en particulier par M. Andrade dans sa thèse citée plus loin (n° 34).

9. Décomposer en éléments simples les fonctions

$$\frac{1}{pu - e_\alpha}, \quad \frac{1}{pu - pv} \quad (v = \text{const.}), \qquad \frac{1}{p'^2 u}, \quad \frac{pu}{p'u}.$$

10. Intégrer au moyen des fonctions elliptiques

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{(ax+b)\,dx}{(x-1)\sqrt{x^3-1}} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3-x}} \\ \displaystyle\int \frac{(ax^2+b)\,dx}{\sqrt{x^4+1}} \end{array}\right\} \quad \text{(fonctions de Weierstrass)},$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^4-1}} \qquad \text{(fonctions de Jacobi)}.$$

(G. Humbert, *Conf. de l'École Polytechn.*)

11. Réduire au type canonique de Jacobi les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm[(x-\alpha)^2+\beta^2][(x-a)^2 \pm b^2]}},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x-a)[(x-\alpha)^2+\beta^2]}},$$

en posant $x = \alpha + \beta \operatorname{tang}(\varphi + \varphi_1)$ et en choisissant φ_1 de manière que la différentielle à intégrer prenne la forme

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos 2\varphi}}.$$

Appliquer à

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x^4-1)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x^3+1)}}.$$

(Comte Magnus de Sparre, *Société scientifique de Bruxelles*, 1885.)

12. *Aire de l'ellipsoïde.* — 1° Aire comprise sur un ellipsoïde quelconque entre deux sections planes le long desquelles on peut circonscrire à l'ellipsoïde un cône de révolution, c'est-à-dire entre deux sections planes dont les pôles sont sur l'hyperbole focale (zone d'Humbert).

2° Le lieu des points d'un ellipsoïde où la normale fait avec l'un des axes principaux de la surface un angle donné, se compose de deux boucles fermées, symétriques par rapport au centre. Aire comprise sur l'ellipsoïde à l'intérieur d'une de ces boucles (zone de Lebesgue et de Gellett). En déduire l'aire de l'ellipsoïde entier.

[G. Humbert, *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie* (*Journal de Mathématiques*, 1890, p. 243 et 255; *voir* aussi *Comptes rendus*, t. CIX, 1889, p. 611).]

13. *Rectification de courbes.* — 1° Rectifier l'arc d'ellipse en utilisant les fonctions de Weierstrass. En déduire le théorème de Fagnano.

(L. Lévy, *Précis des Fonct. ellipt.*, p. 145.)

2° Rectifier l'arc de lemniscate

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

en prenant le rayon vecteur ρ pour variable indépendante.

3° On considère la cubique

$$x = -\frac{9}{p u}, \qquad y = \frac{p' u}{2 p u}$$

($g_2 = 0$, $g_3 = -27$; axes rectangulaires).

Exprimer son élément d'arc en fonction de u.

Exprimer l'élément d'arc de sa transformée par inversion par rapport à l'origine suivant le module 1, aussi en fonction de u.

Trouver, en fonction de u, les coordonnées d'un point de cette transformée. Démontrer que tout cercle passant par l'origine O des axes détermine sur cette transformée, dite *courbe en trèfle*, trois arcs OA, OB, OC dont le plus grand est égal à la somme des deux autres.

(G. HUMBERT, *Journal de Mathématiques*, 1887, p. 394.)

14. *Lignes géodésiques*. — 1° De l'ellipsoïde de révolution aplati; 2° de la surface de vis à filet carré.

15. On donne un ellipsoïde d'axes $2a$, $2b$, $2c$ $(a > b > c)$ liés par la relation $2b^2 = a^2 + c^2$. Déterminer sur sa surface les lignes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux diagonales du rectangle des axes de l'indicatrice en ce point.

(X. STOUFF, *Nouvelles Annales de Math.*, 1896.)

16. Sur l'équation d'Euler et son intégration algébrique.

[Lire la Note de M. LACOUR (*Nouv. Annales*, 1899, p. 293).]

17. *Théorèmes de Poncelet*. — S'il existe un polygone P de n côtés inscrit dans une conique S et circonscrit à une autre conique T, il existe une infinité de polygones analogues de n côtés.

Si n est pair, les droites qui joignent deux sommets opposés passent par un centre de sécantes communes des deux coniques.

Soit $\Delta(\lambda)$ le discriminant de la forme $T + \lambda S$; démontrer que, si l'on développe $\sqrt{\Delta(\lambda)}$ suivant les puissances positives croissantes de λ sous la forme

$$\sqrt{\Delta(\lambda)} = A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + E\lambda^4 + \ldots,$$

la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un polygone P est

$$\begin{array}{lcl} C = 0 & \text{pour} & n = 3, \\ D = 0 & \text{»} & n = 4, \\ \begin{vmatrix} C & D \\ D & E \end{vmatrix} = 0 & \text{»} & n = 5, \\ \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0 & \text{»} & n = 6. \end{array}$$

(CAYLEY, *Mathematical Papers*.)

Développer les calculs dans le cas de deux cercles; décomposition des équations de condition.

(Lire sur ce sujet un intéressant article de M. LELIEUVRE (*Enseignement mathématique*, 1900, p. 410-423).]

18. Soit une cubique dont les trois asymptotes sont inflexionnelles et concourent en un même point O; une droite quelconque la coupe en trois points M_1, M_2, M_3. Si la droite se déplace, la somme algébrique des aires balayées par les rayons vecteurs OM_1, OM_2, OM_3 est nulle (c'est-à-dire que la plus grande de ces aires est égale à la somme des deux autres).

(G. HUMBERT, *Cours de l'École Polytechn.*)

19. *Obtention de la représentation paramétrique elliptique :* 1° d'une cubique plane; 2° d'une quartique à deux points doubles; 3° de la polaire réciproque d'une cubique.

(HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechn.*, Ire Partie, p. 422, 425-427.)

20. La thèse du R. P. d'Esclaibes *Sur l'application des fonctions elliptiques aux courbes de genre* UN (1880) contient un Chapitre consacré aux propriétés des cubiques planes. L'étude des points remarquables y est déduite de la formule de Kiépert : Points d'inflexion, leur disposition; points sextactiques; points situés sur une conique.

Polygones de Steiner. — Inscrire dans une cubique des polygones d'un nombre pair de côtés et tels que les côtés de rang impair concourent en un point fixe de la courbe, et de même les côtés de rang pair en un autre point fixe.

Points correspondants ou *points dont les arguments elliptiques ont une différence constante.* — L'enveloppe des droites qui joignent deux points correspondants est une courbe de sixième classe et de douzième ordre, tangente à la cubique en dix-huit points; cette courbe admet neuf tangentes doubles dont chacune passe par un point d'inflexion.

21. Traiter à l'aide des fonctions de Weierstrass la question proposée comme problème de Mathématiques spéciales au Concours de l'École Normale en 1900 [*Propriétés des cercles bitangents à la cubique :* $x(x^2+y^2)=a^3$].

22. Pour la cubique, lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère, l'invariant absolu reste le même quand on déforme le quadrilatère.

23. Il y a neuf systèmes de coniques biosculatrices à une cubique S : la droite qui joint les points de contact avec S des coniques d'un même système passe par un des neuf points d'inflexion.

Soit I ce point :

1° Par un point quelconque A du plan passent trois coniques biosculatrices du même système; ces coniques ont un second point commun B situé sur la droite AI ; les six points de contact de ces trois coniques avec S sont sur une conique qu'on appellera *conique polaire* de A; A sera dit le *pôle* de cette conique: il est clair que B est également un pôle de la conique et que toute conique polaire a ainsi deux pôles;

2° Toute conique polaire passe par ses pôles;

3° Les coniques polaires des points d'une conique polaire passent par les pôles de celle-ci ;

4° Les pôles des coniques polaires menées par un point sont sur la conique polaire de ce point;

5° Si un point décrit une droite passant par I, sa conique polaire reste bitangente à une conique fixe; les deux points de contact sont sur la tangente en I à la cubique S;

6° Quand un point décrit une conique C biosculatrice à S, du système considéré, sa conique polaire reste bitangente à une cubique fixe, osculatrice à S au point I et aux deux points de contact de S et de C;

7° Supposons qu'un point A décrive une conique C ; soient C′ et C″ les deux autres coniques biosculatrices du même système passant par A; elles se coupent aux deux points A et B qui décrivent C, et en deux autres points qui décrivent la cubique du 6° :

8° Les coniques polaires qui passent par un point touchent en deux points une cubique osculatrice à S au point I.

(On utilisera l'équation normale de la cubique

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

en prenant le point I à l'infini sur Oy.)

(G. HUMBERT, Thèse sur les *Courbes de genre* UN; 1885.)

24. Théorèmes de Steiner sur les coniques surosculatrices à une quartique de genre *un*.

(D'ESCLAIBES, *Thèse.*)

25. *Points d'une quartique de genre* UN, *conjugués dans un système* S, *ou points dont les arguments elliptiques ont une somme* S. — Ce mode de conjugaison est indépendant du mode de représentation employé.

La droite qui joint deux points conjugués dans un système donné enveloppe une conique.

Le conjugué harmonique par rapport à deux points conjugués dans un système S, du point où la droite qui les joint coupe une droite fixe, décrit une courbe unicursale d'ordre quatre.

Ce lieu est une conique pour quatre positions particulières de la droite fixe.

Si S est une demi-période, la droite qui unit deux points conjugués passe par un point fixe.

(G. HUMBERT, Thèse sur les *Courbes de genre* UN.)

26. Soit la courbe C :

$$(x^2+y^2)^2 - 2a(x^2+y^2)(x+y) + a^2(x+y)^2 - 2a^3y = 0.$$

1° Exprimer les coordonnées x, y d'un point quelconque en fonction elliptique d'un paramètre u.

2° Déterminer tous les couples de quadriques dont l'intersection se projette suivant C.

3° Condition pour que quatre points de C soient sur un cercle. Soient U_1, U_2, U_3, U_4 ces quatre points; si par U_1 et U_2 on fait passer une droite ou un cercle, et par U_3 et U_4 une autre droite ou un autre cercle, on obtient chaque fois deux autres points d'intersection, soit V_1, V_2, V_3 et V_4 : ces quatre points V sont sur un même cercle.

4° Il y a quatre familles de cercles bitangents à C. Déterminer l'ordre, la classe, le genre de l'enveloppe des cordes de contact de chaque famille. Établir que chaque corde de contact coupe la courbe en deux autres points qui sont les points de contact d'un cercle bitangent de la même famille.

5° Quel est le nombre des cercles bitangents à C tangents en un point U_0? Si U_1 et U_2 sont les deux autres points de contact respectifs de deux de ces cercles, trouver l'ordre et la classe de l'enveloppe de la corde U_1U_2 quand U_0 varie.

6° Nombre des cercles osculateurs passant par un point U_0 de C; U_1 et U_2 étant les points de contact de deux de ces cercles, ordre et classe de l'enveloppe de la corde U_1U_2.

7° Nombre des cercles surosculateurs à C; les points de surosculation sont quatre à quatre sur des cercles.

(P. PAINLEVÉ, *Exercice proposé aux élèves de l'École Normale.*)

(On utilisera le mode de représentation de M. Painlevé indiqué au n° 7.)

27. *Étude de la biquadratique gauche, avec les notations de Jacobi.* — La plupart des résultats attribués à Harnack ont été publiés six mois avant le Mémoire de ce géomètre par M. Léauté. Les *Nouvelles Annales* ont reproduit ces propriétés sous forme de questions proposées sous les n^{os} 1901 et 1907 (année 1901).

[H. LÉAUTÉ, *Étude géométrique sur les fonctions elliptiques de première espèce* (*Comptes rendus,* septembre 1876; *Journal de l'École polytechnique,* Cahier XLVI, 1879).]

28. Appliquer les fonctions elliptiques à la résolution du problème proposé dans les *Nouvelles Annales,* 1897, p. 287, et relatif à une biquadratique gauche définie numériquement.

29. *Étude de la surface gauche du quatrième ordre à deux directrices rectilignes* DOUBLES *distinctes.* — 1° En prenant les droites doubles pour arêtes opposées du tétraèdre de référence ($x = 0$, $y = 0$) et ($z = 0$, $t = 0$), on peut disposer des faces de ce tétraèdre de manière à donner à la surface la représentation paramétrique

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{\operatorname{sn} u} = \frac{z}{v \operatorname{sn}(u - \alpha)} = \frac{t}{v},$$

où u et v sont les variables, et α une constante.

Équation ponctuelle de la surface.

2° Génératrices rectilignes remarquables de la surface.

3° Quadriques inscrites dans la surface.

4° Les asymptotiques de la surface sont des courbes algébriques du huitième ordre qui divisent harmoniquement les génératrices de la surface.

5° Condition pour que quatre génératrices rectilignes appartiennent à une même quadrique. Quadriques touchant suivant deux droites, osculatrices, surosculatrices.

[E. Rouyer, *Sur les surfaces réglées du quatrième degré* (*Annales de Toulouse,* 1900, p. 163).]

30. Cayley a donné le nom de *tétraèdroïde* à la transformée homographique de la surface des ondes. Il y a sur cette surface huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans; dans chacun de ces plans, les points communs à deux coniques sont des points doubles de la surface.

L'étude de cette surface au moyen des notations de Weierstrass a formé le sujet d'un concours des *Nouvelles Annales*. Lire la solution de M. Raoul Bricard.

(*Nouvelles Annales,* 1899, p. 197.)

31. Étudier le mouvement du pendule simple en utilisant les notations de Weierstrass.

32. Étudier le mouvement du pendule sphérique en utilisant les notations de Jacobi.

(Mathieu, *Dynamique analytique,* p. 105.)

33. Le mouvement d'un point sur une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

dans le cas de la fonction de forces

$$U = Ax^2 + B(y^2 + z^2)$$

se ramène aux fonctions elliptiques. (Equation de Lamé dans le cas le plus simple de $n = 1$.)

(G. Kobb, *Comptes rendus,* t. CVIII, p. 560.)

34. Mouvement d'un point soumis à l'attraction newtonienne de deux points fixes. Réduction aux quadratures. Inversion.

(J. Andrade, Thèse, *Journal de l'École Polytechnique,* 60e Cahier, 1890, p. 19-46.)

35. Mouvement d'un corps pesant, homogène, de révolution, suspendu par un point de son axe. Emploi des notations de Jacobi.

(Mathieu, *Dynamique analytique,* p. 147.)

36. Même question. Substitution des paramètres de Klein aux angles d'Euler ; expressions elliptiques de ces divers paramètres.

(LACOUR, *Nouvelles Annales,* 1899, p. 543-553.)

37. Mouvement à la Poinsot dans le cas d'une quadrique roulante quelconque. Formules elliptiques pour le mouvement et pour les cosinus directeurs des axes.

(LACOUR, *Annales de l'École Normale,* 1900, p. 281.)

38. Mouvement d'un corps solide de révolution fixé par un point de son axe; chaque point de ce corps homogène est soumis à une force constante, à une force dirigée vers le point fixe et proportionnelle à la distance à ce point fixe, et à une force proportionnelle à la distance à un plan fixe normal à la direction de la force constante.

(NANNY LAGERBORG, *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1890.)

39. Forme d'équilibre d'un fil homogène pesant sur une sphère. Expressions des coordonnées d'un point du fil et de l'arc au moyen des fonctions de Jacobi.

(P. APPELL, *Société mathématique de France*, 1885.)

40. Courbe plane dont le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'abscisse. Déterminer les constantes par la condition que la courbe passe par l'origine et y touche l'axe des x. Forme et propriétés de la courbe. (Elastique plane sans pression.)

41. Élastique gauche : hélice soumise à l'action d'un couple, cas particulier de B. ELIE.

(ELIE, *Nouvelles Annales*, 1901, p. 307-313.)

42. *Calculs numériques; usage des Tables.* — 1° Une ellipse a pour demi-axes $OA = 2$ et $OB = \sqrt{2}$. Calculer l'arc BM, le point M ayant pour abscisse $x = 1$.

2° L'angle initial d'un pendule simple de longueur $\frac{1}{2}.9^{m},088$ est de 60°. Calculer la durée d'une oscillation simple. Au bout de combien de temps le pendule fait-il, pour la première fois, un angle de 30° avec la verticale.

(G. HUMBERT, *Cours d'Analyse de l'École Polyt.*)

3° Résoudre au moyen des fonctions elliptiques l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 23x - 6 = 0.$$

(L. Lévy, *Précis*, p. 154.)

4° Calculer la surface totale d'un ellipsoïde dont les demi-axes sont $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$.