NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE GODEFROY

Sur la convergence de la série hypergéométrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 64-65

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__64_0>

[E1] [H5f]
SUR LA CONVERGENCE DE LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE;

PAR M. MAURICE GODEFROY,
Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille.

Si l'on regarde la fonction $\Gamma(x)$ comme étant la limite, pour $n=\infty$, du produit

$$\Pi(x) = n^x \frac{1.2\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

on en déduit sans peine que l'expression

$$\frac{1}{n^x}\,\frac{\Gamma(x+n)}{1.2\ldots(n-1)}$$

tend vers l'unité quand n augmente indéfiniment. Ce résultat, dû à Weierstrass, non seulement a de l'importance au point de vue de la théorie de la fonction gamma, mais il fournit en outre un procédé commode pour la discussion de certaines séries dont les termes sont formés avec des factorielles. A cette catégorie appartiennent les séries considérées par Stirling et la série hypergéométrique. Je me bornerai au cas de la série hypergéométrique, qui, je crois, n'a pas encore été étudiée de cette manière.

Soit donc

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

la série hypergéométrique de Gauss, les paramètres α, β, γ étant réels ou complexes mais non égaux à des entiers négatifs. Le terme général de cette série

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n$$

est égal, comme on le constate facilement, au produit des deux expressions

$$n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^n,$$

et

$$\left[\frac{1}{n^\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{1}{n^\beta}\frac{\Gamma(\beta+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right]:\left[\frac{1}{n^\gamma}\frac{\Gamma(\gamma+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right],$$

cette dernière ayant pour limite l'unité lorsque n devient infini. Or, si a, b, c sont les parties réelles des paramètres α, β, γ, le module de l'exponentielle $n^{\alpha+\beta-\gamma-1}$ est $n^{a+b-c-1}$; par conséquent, on peut poser

$$|u_n| = \lambda_n n^{a+b-c-1}|x|^n,$$

en désignant par λ_n un coefficient qui tend vers une limite pour $n=\infty$. Le rayon de convergence est évidemment l'unité; il reste à examiner la nature de la série aux extrémités de son intervalle de convergence. Trois hypothèses sont alors à distinguer :

1° $a+b-c-1>0$. — Les modules des termes augmentent indéfiniment.

2° $a+b-c-1=0$. — Les modules des termes tendent vers une limite non nulle.

3° $a+b-c-1<0$. — Les modules des termes tendent vers zéro.

La série des modules est convergente quand a, b, c vérifient l'inégalité

$$a+b-c<0,$$

et seulement dans ce cas, car

$$n^{c-b-a+1}|u_n| = \lambda_n.$$