Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 566-574

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__566_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1505.

1884, p. 447.)

De chaque point M *du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la droite de Simpson relative à ce point et à ce triangle; on demande :*

1° *Le lieu du pied* P *de cette perpendiculaire;*

2° *L'enveloppe de la droite* MP. (D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. H. LEZ.

Prenant le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC pour origine des coordonnées, un point quelconque M de ce cercle pourra être représenté par

$$x = \mathrm{R}\cos\varphi, \qquad y = \mathrm{R}\sin\varphi;$$

si α, β, γ sont les angles que les rayons OA, OB, OC font avec l'axe des X, les sommets du triangle auront des coordonnées analogues.

Choisissant l'axe des X de manière que $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, nous trouverons que les côtés du triangle ABC ont pour équations :

$$(1) \qquad \mathrm{AB}\ldots\ldots \quad y\sin\frac{\gamma}{2} - x\cos\frac{\gamma}{2} = \mathrm{R}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right),$$

$$(2) \qquad \mathrm{AC}\ldots\ldots \quad y\sin\frac{\beta}{2} - x\cos\frac{\beta}{2} = \mathrm{R}\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right),$$

$$(3) \qquad \mathrm{BC}\ldots\ldots \quad y\sin\frac{\alpha}{2} - x\cos\frac{\alpha}{2} = \mathrm{R}\cos\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right).$$

Les hauteurs du même triangle étant représentées :

$$\text{Pour le sommet A par} \quad y\cos\frac{\alpha}{2} + x\sin\frac{\alpha}{2} = \mathrm{R}\sin\frac{3\alpha}{2},$$

$$\text{»} \qquad \mathrm{B} \quad \text{»} \quad y\cos\frac{\beta}{2} + x\sin\frac{\beta}{2} = \mathrm{R}\sin\frac{3\beta}{2},$$

$$\text{»} \qquad \mathrm{C} \quad \text{»} \quad y\cos\frac{\gamma}{2} + x\sin\frac{\gamma}{2} = \mathrm{R}\sin\frac{3\gamma}{2},$$

l'orthocentre aura pour coordonnées :

$$x = \mathrm{R}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$$
$$= -\mathrm{R}\left(1 + 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) = 2n,$$

$$y = \mathrm{R}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$
$$= 4\mathrm{R}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) = 2m.$$

Mais les perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du triangle ont pour équations

$$(4)\quad \text{Sur AB}\ldots\ldots\quad y\cos\frac{\gamma}{2}+x\sin\frac{\gamma}{2}=\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$(5)\quad \text{» AC}\ldots\ldots\quad y\cos\frac{\beta}{2}+x\sin\frac{\beta}{2}=\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$(6)\quad \text{» BC}\ldots\ldots\quad y\cos\frac{\alpha}{2}+x\sin\frac{\alpha}{2}=\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Or, une droite passant par l'intersection des droites (1) et (4) aura pour équation :

$$\begin{aligned}&-x\cos\frac{\gamma}{2}+y\sin\frac{\gamma}{2}-\mathrm{R}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\\&\quad+\mathrm{K}\left[x\sin\frac{\gamma}{2}+y\cos\frac{\gamma}{2}-\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=0;\end{aligned}$$

l'équation de celle qui passe par l'intersection des droites (2) et (5) sera de même

$$\begin{aligned}&-x\cos\frac{\beta}{2}+y\sin\frac{\beta}{2}-\mathrm{R}\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\\&\quad+\mathrm{K}'\left[x\sin\frac{\beta}{2}+y\cos\frac{\beta}{2}-\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\beta}{2}\right)\right]=0.\end{aligned}$$

Quand ces deux équations sont identiques, elles représentent la droite de Simpson; pour

$$\mathrm{K}=\cos\frac{\gamma-\varphi}{2}:\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}$$

et

$$\mathrm{K}'=\cos\frac{\beta-\varphi}{2}:\sin\frac{\beta-\varphi}{2},$$

ce résultat est obtenu et, après réductions, nous avons pour l'équation de la pédale :

$$\begin{aligned}&x\sin\frac{\varphi}{2}+y\cos\frac{\varphi}{2}\\&=\mathrm{R}\left(\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\&\qquad-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\end{aligned}\right)\end{aligned}$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$\sin\frac{\varphi}{2}\left(x + \frac{R}{2} + 2R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$+ \cos\frac{\varphi}{2}\left(y - 2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{R}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}$$

ou

$$(7) \qquad (x - n)\sin\frac{\varphi}{2} + (y - m)\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}.$$

De plus, une perpendiculaire abaissée du point M sur la droite de Simpson a pour équation

$$y - R\sin\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}(x - R\cos\varphi)$$

ou

$$(8) \qquad -y\sin\frac{\varphi}{2} + x\cos\frac{\varphi}{2} = R\cos\frac{3\varphi}{2}.$$

En éliminant la variable φ entre les équations (7) et (8), nous aurions le lieu du point de rencontre cherché. Comme nous le verrons plus loin, l'équation de ce lieu est assez compliquée et il est plus simple d'avoir recours aux coordonnées du point de rencontre P; elles permettront de construire la courbe par points. Ces coordonnées sont :

$$(9) \qquad x = \frac{n}{2}(1 - \cos\varphi) + \frac{m}{2}\sin\varphi + \frac{R}{4}(2\cos^2\varphi + 3\cos\varphi - 1) = 0,$$

$$(10) \qquad y = \frac{n}{2}\sin\varphi + \frac{m}{2}(1 - \cos\varphi) - \frac{R}{4}\sin\varphi(3 - 2\cos\varphi) \qquad = 0.$$

Donnant à φ les valeurs ci-après, nous aurons quelques points remarquables de la courbe, savoir :

1° $\varphi = 0$, $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $x = R$, $y = m$;

2° $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\quad \sin\varphi = 1$, $\quad \cos\varphi = 0$, $\quad x = \frac{m+n}{2} + \frac{R}{4}$,
$y = \frac{m+n}{2} + \frac{3R}{4}$;

3° $\varphi = \pi$, $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = -1$, $x = \frac{2n - R}{2}$, $y = 0$;

4° $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $\sin\varphi = -1$, $\cos\varphi = 0$, $x = \frac{n-m}{2} - \frac{R}{4}$, $y = \frac{m-n}{2} - \frac{3R}{2}$.

Mettons les équations (9) et (10) sous la forme

$$x = \frac{R}{4}\left\{\begin{array}{l} 2\cos^2\varphi - 1 - \cos(\alpha+\varphi) + \cos\alpha + 3\cos\varphi \\ + 2\left[\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\right]\cos\frac{\gamma-\beta}{2} \end{array}\right\},$$

$$y = \frac{R}{4}\left\{\begin{array}{l} \sin(\alpha+\varphi) + \sin\alpha + 3\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi \\ - 2\left[\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right]\cos\frac{\gamma-\beta}{2} \end{array}\right\};$$

pour $\varphi = \alpha$, nous aurons

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\alpha;$$

la courbe passe donc par les sommets du triangle ABC. Pour $\varphi = \pi + \alpha$, le point M étant diamétralement opposé à A, nous avons

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}\left(2\cos^2\alpha - 1 - \cos\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right) \\ &= -R\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right), \\ y &= \frac{R}{2}\left(-2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right) \\ &= R\left(-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right), \end{aligned}$$

coordonnées du point où le centre touche le côté opposé au sommet A.

Quant aux tangentes, leur coefficient angulaire est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2n\cos\varphi - 2m\sin\varphi + R(3\cos\varphi - 2\cos2\varphi)}{2n\sin\varphi + 2m\cos\varphi - R(3\sin\varphi + 2\sin2\varphi}$$

Maintenant prenant la dérivée de l'équation (8), soit

$$(11) \qquad x \sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = 3\,\mathrm{R}\sin\frac{3\varphi}{2},$$

et éliminant la variable φ entre les équations (8) et (11), nous aurons celle de l'enveloppe de la perpendiculaire MP.

Mais avant d'opérer cette élimination, remarquons l'analogie qui existe entre les deux systèmes d'équations (7) et (8), (8) et (11). Pour écrire l'équation de la courbe, il suffirait de connaître la relation qui résulte de l'élimination de la variable u entre les deux équations générales :

$$(12) \qquad a \sin u + b \cos u = \sin 3u,$$

$$(13) \qquad a' \sin u + b' \cos u = \cos 3u;$$

ce que nous déterminerons par les transformations ci-après :

Multipliant d'abord la première par $\cos u$ et la seconde par $\sin u$, nous aurons

$$a \sin u \cos u + b\cos^2 u = \sin 3u \cos u,$$

$$a' \sin^2 u + b' \sin u \cos u = \cos 3u \sin u,$$

et la soustraction donnera

$$(a - b')\sin u \cos u + b\cos^2 u - a' \sin^2 u = \sin 2u = 2\sin u \cos u$$

ou

$$(14) \qquad (a - b' - 2)\sin u \cos u + (b + a')\cos^2 u - a' = 0.$$

Multipliant ensuite la première par $\sin u$ et la seconde par $\cos u$, nous aurons encore

$$a \sin^2 u + b\cos u \sin u = \sin 3u \sin u,$$

$$a' \cos u \sin u + b' \cos^2 u = \cos 3u \cos u,$$

et l'addition donnera

$$(a' + b)\cos u \sin u + a\sin^2 u + b'\cos^2 u = \cos 2u = 2\cos^2 u - 1$$

ou

$$(15) \qquad (a' + b)\cos u \sin u - (a - b' + 2)\cos^2 u + 1 + a = 0.$$

De ces deux nouvelles équations (14) et (15), nous tirons facilement

$$\cos^2 u = \frac{a'(b+a') + (a+1)(a-b'-2)}{(b+a')^2 + (a-b')^2 - 4}$$

et

$$\cos^2 u \sin^2 u = \left(\frac{a'(1-b') - b(1+a)}{(b+a')^2 + (a-b')^2 - 4}\right)^2 = \cos^2 u - \cos^4 u,$$

puis la substitution de $\cos^2 u$ dans cette dernière égalité conduit à un résultant de la forme $UW + V^2 = 0$, soit

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &[a'(b+a') + (1-a)(a-b'-2)] \\ &\quad \times [(a-b')(1+b') - 2(a-1) - b(b+a')] \\ &\qquad + [a'(1-b') - b(1+a)]^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Alors, pour l'élimination de φ entre les équations (7) et (8), nous aurons

$$a = \frac{2(x-n)}{R}, \qquad b = \frac{2(y-m)}{R}, \qquad a' = -\frac{y}{R} \qquad b' = \frac{x}{R}.$$

Portant ces valeurs dans la relation (16) nous trouverons pour l'équation générale du lieu du point P :

$$\begin{aligned} &(2x^2 + y^2 - 3Rx - 6nx + 2my + 4n^2 + 2Rn - 2R^2) \\ \times\, &(x^2 + 2y^2 - 3Rx + 2nx - 6my - 4m^2 + 2Rn - 2R^2) \\ &\qquad + (2Rm - 4mn - 4mx - 4ny - 3Ry - 3xy)^2 = 0 \end{aligned}$$

enveloppe d'une conique $\lambda^2 U + 2\lambda V - W = 0$.

Réduisant, nous obtenons la quartique unicursale

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &2(x^2+y^2)^2 - 10m(x^2+y^2)y \\ &- (10n + 9R)x^3 + (27R - 10n)xy^2 \\ &- (16n^2 + 8m^2 - 30Rn + 11R^2)x^2 \\ &+ (8n^2 + 16m^2 - 30Rn + 11R^2)y^2 \\ &- 4m(15R - 4n)xy \\ &- 4m(2m^2 + 2n^2 - 14Rn + 5R^2)y \\ &- 4(2n^3 + 2m^2 n - 7Rm^2 + 7Rn^2 + 5R^2 n)x \\ &- 4R^4 - 24Rm^2 n + 12R^2 m^2 + 12R^2 n^2 + 8Rn^3 = 0, \end{aligned}\right.$$

courbe qui entoure le triangle ABC en passant par les sommets et en touchant chacun de ces côtés.

De même, pour l'élimination de φ entre les équations (8) et (11), nous aurons

$$a = \frac{x}{3\,\mathrm{R}}, \qquad b = \frac{y}{3\,\mathrm{R}},$$

$$a' = -\frac{y}{\mathrm{R}}, \qquad b' = \frac{x}{\mathrm{R}}.$$

Ces valeurs étant portées dans la relation (16), nous trouverons pour l'équation de l'enveloppe de la droite MP :

$$[3y^2 - x^2 - 3\,\mathrm{R}(3\,\mathrm{R} + 2x)][y^2 - 3x^2 - 3\,\mathrm{R}(3\,\mathrm{R} - 2x)] - 4y^2(3\,\mathrm{R} - 2x)^2 = 0,$$

soit en réduisant

$$(x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2)^2 - 8\,\mathrm{R}x(x^2 - 3y^2) + 20\,\mathrm{R}^2(x^2 - y^2) - 28\,\mathrm{R}^4 = 0$$

ou

$$(18) \qquad (x^2 + y^2 + 9\,\mathrm{R}^2 - 12\,\mathrm{R}x)^2 - 4\,\mathrm{R}(3\,\mathrm{R} - 2x)^2 = 0.$$

Cette enveloppe est une quartique tricuspidale ou hypocycloïde à trois rebroussements, courbe connue, tangente au cercle circonscrit et dont les trois rebroussements sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon triple.

En effet, si nous cherchons les abscisses des points de tangence de la quartique (18) avec le cercle circonscrit

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$

nous aurons

$$(2x + \mathrm{R})^2(x - \mathrm{R}) = 0;$$

de là, deux racines

$$x = \mathrm{R}, \qquad x = -\frac{\mathrm{R}}{2};$$

dont la dernière est double. Si, dans la même équation, nous remplaçons $x^2 + y^2$ par $9\,\mathrm{R}^2$, elle se décomposera encore en produit de deux facteurs

$$(3\,\mathrm{R} - 2x)^2(3\,\mathrm{R} - x) = 0$$

qui sont les racines de l'équation

$$4x^3 - 27R^2x - 27R^3 = 0$$

donnant les abscisses des trois points de rebroussement.

Enfin, si, des équations (8) et (11), nous tirons la valeur des coordonnées de chaque point de l'hypocycloïde (18), nous trouverons

$$(19) \qquad \begin{cases} x = R(2\cos\varphi - \cos 2\varphi), \\ y = R(2\sin\varphi + \sin 2\varphi). \end{cases}$$

Or, pour que les quartiques (17) et (18) aient des points communs, il faut que leurs coordonnées soient les mêmes; de là, les deux relations

$$\begin{gathered} 4R(2\cos\varphi - \cos 2\varphi) \\ = 2n(1 - \cos\varphi) + 2m\sin\varphi + R(3\cos\varphi + \cos 2\varphi), \\ 4R(2\sin\varphi + \sin 2\varphi) \\ = 2n\sin\varphi - 2m(1 + \cos\varphi) + R(3\sin\varphi - \sin 2\varphi). \end{gathered}$$

Réduites, elles deviennent

$$(20) \qquad \begin{cases} 2n(1 - \cos\varphi) - 2m\sin\varphi \\ \qquad - 5R(2\cos\varphi - 1)(1 - \cos\varphi) = 0, \\ 2n\sin\varphi - 2m(1 + \cos\varphi) \\ \qquad - 5R\sin\varphi(2\cos\varphi - 1) \qquad = 0. \end{cases}$$

Portant, par exemple, dans la première la valeur de $\sin\varphi = -\dfrac{2m(1 + \cos\varphi)}{5R(2\cos\varphi + 1) - 2n}$ tirée de la seconde, nous aurons

$$4m^2(1 + \cos\varphi) - (1 - \cos\varphi)[5R(2\cos\varphi + 1) - 2n]^2 = 0,$$

relation du troisième degré, qui montre que les deux quartiques (17) et (18) ont trois points communs, comme il était facile de le voir d'après le mode de génération de ces courbes.