SOLON CHASSIOTIS

Note sur la courbure des lignes géodésiques d'une surface de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 564-566

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__564_1>

[O51α]

NOTE SUR LA COURBURE DES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION;

PAR M. SOLON CHASSIOTIS.

M. H. Resal a étendu le théorème de Gudermann sur l'ellipsoïde aux autres surfaces du second degré de révolution. (*Nouv. Annales*, 1887, p. 57, et M. APPELL, *Mécanique*, t. I, p. 498, où cette question est proposée comme exercice.)

Nous allons chercher toutes les surfaces de révolution pour lesquelles, le long de toute géodésique, le rapport du rayon de courbure de la méridienne à celui de cette géodésique reste constant.

Soient

R et R' les rayons de courbure principaux en un point M de la surface de révolution;

x le rayon du parallèle correspondant;
i l'inclinaison de la ligne géodésique considérée sur la méridienne;
ρ son rayon de courbure;
K la valeur constante du produit $r \sin i$ le long de la ligne géodésique considérée.

Posons

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{f(x)};$$

la formule

$$\frac{x^2}{R} + \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) K^2 = \frac{x^2}{\rho}$$

de M. Resal devient

$$(1) \qquad \frac{\rho}{R} = \frac{x^2}{x^2 - K^2 + K^2 f(x)}.$$

Pour que

$$\frac{\rho}{R} = C,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$f(x) = 1 + \mu x^2,$$

où

$$(2) \qquad \mu = \frac{1}{K^2}\left(\frac{1}{C_0} - 1\right).$$

Comme la surface est de révolution, on a

$$R' = N,$$

N étant la normale à la méridienne jusqu'à l'axe de la surface; par suite, on a, en remplaçant R, N par leurs valeurs,

$$(3) \qquad \frac{y''}{y'(1 + y'^2)} = \frac{1}{x(1 + \mu x^2)}$$

ou

$$\frac{y''}{y'} - \frac{y' y''}{1 + y'^2} = \frac{1}{x} - \frac{\mu x}{1 + \mu x^2}$$

et, en intégrant une première fois, on a, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\sqrt{C_1} x}{\sqrt{1 + \mu x^2}},$$

qui peut s'écrire

$$y' = \frac{2 \sqrt{C_1} x}{2 \sqrt{1 + (\mu - C_1) x^2}},$$

d'où

$$y = \frac{\sqrt{C_1}}{(\mu - C_1)} \sqrt{1 - (\mu - C_1) x^2} + C_0.$$

L'équation de la méridienne est donc celle d'une conique ayant pour axe l'axe de la surface, par suite :

Les seules surfaces de révolution pour lesquelles reste constant le long d'une géodésique le rapport des rayons de courbure de cette géodésique et de la méridienne sont des surfaces du second degré.

C'est la réciproque du théorème déjà cité.