NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BAUDRAN

Représentation des objets au moyen de deux perspectives sur un même tableau

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 552-562

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__552_1>

[K23a]

REPRESENTATION DES OBJETS AU MOYEN DE DEUX PERSPECTIVES SUR UN MÊME TABLEAU;

PAR M. E. BAUDRAN,
Capitaine du Génie.

1. Une perspective ne permet pas de définir géométriquement un objet; parmi les systèmes que l'on peut employer pour compléter cette définition nous choisissons le suivant qui correspond aux vues stéréoscopiques :

Un corps sera représenté par ses perspectives sur un même tableau au moyen de deux points de vue différents.

2. Les deux points de vue [O] [O′] seront définis par leurs projections orthogonales sur le tableau O, O′ et leurs distances d, d' au tableau ($d < d'$) (*fig.* 1).

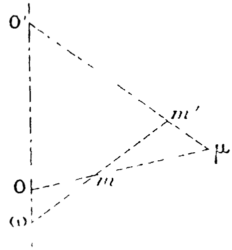
Nous appellerons *point de rappel* le point ω où la droite [O] [O′] perce le tableau $\left(\frac{\omega \mathrm{O}}{\omega \mathrm{O}'} = \frac{d}{d'}\right)$ et *ligne de rappel* une droite du tableau passant par ω.

Nous désignerons une figure de l'espace par des lettres entre crochets [a, A, ...]; sa perspective par rapport à [O] ou *perspective première* par les mêmes lettres sans crochets : a, A, ...; sa perspective par rapport à [O′] ou *perspective seconde* par les mêmes lettres accentuées : a', A′, ...

3. *Les deux perspectives d'un point de l'espace sont sur une même ligne de rappel et réciproquement.*

Si (fig. 1) m et m' sont les perspectives d'un même

Fig. 1.



point $[m]$ de l'espace, les droites Om, $O'm'$ se coupent en un point μ projection orthogonale du point $[m]$ sur le tableau.

4. *Deux droites quelconques du tableau A, A' représentent généralement les perspectives d'une même droite de l'espace et réciproquement.*

Deux droites parallèles sont les perspectives d'une frontale et réciproquement.

Remarque. — Lorsque, dans ce dernier cas, les deux plans $[O]A$, $[O']A'$ sont parallèles, la droite $[A]$ est rejetée à l'infini ou, ce qui revient au même, A et A' sont les lignes de fuite d'un même plan.

5. Trace d'une droite. — *La trace d'une droite sur le tableau est l'intersection de ses deux perspectives.*

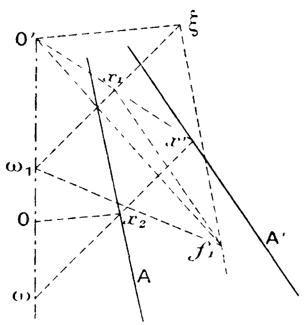
6. Problème I. — *Trouver les points de fuite d'une droite.*

Les deux points cherchés f, f' sont tels que Of, $O'f'$ sont parallèles et doivent être sur une même ligne de rappel. On mènera une ligne de rappel quelconque $\omega x'$ coupant A' en x', la parallèle Ox à $O'x'$ coupe $\omega x'$ en x.

Le point f est à l'intersection de A et de la parallèle à A' menée par x; il se rappelle en f' sur A'.

Lorsque f et f' sortent des limites de l'épure on détermine facilement la direction Of, $O'f'$. Pour cela (*fig.* 2),

Fig. 2.



sur $O'x'$ on prend un point quelconque x, on mène $x\xi$ et $O'\xi$ parallèles à $\omega x'$ et $O'x_2$. Puis ξf_1 et $x_1 f_1$ parallèles à A et A', $O'f_1$ est la direction cherchée. Cela résulte de l'homothétie de la figure ainsi construite et de la précédente (¹).

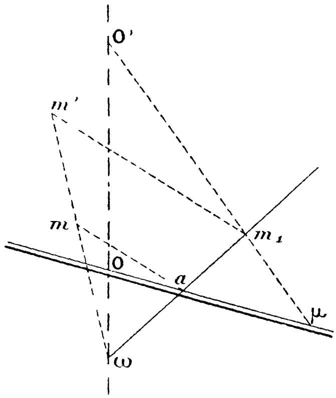
7. Problème II. — *Mener par un point une parallèle à une droite.*

Il suffit de joindre les perspectives du point aux points de fuite de la droite. Si ces points sont en dehors des limites de l'épure, on déduira très facilement de la construction indiquée au Paragraphe précédent une construction inverse résolvant le problème.

(¹) ξx_1 coupe OO_1 en ω_1 et $\omega_1 f_1$ est parallèle à ωf.

8. Proposons-nous de déterminer la profondeur d'un point m, m'. Imaginons une droite passant par [O]; sa perspective première est un point a (*fig.* 3) et sa

Fig. 3



perspective seconde la droite ωa. Joignons le point $[m]$ au point de même profondeur $[m_1]$ de la droite $[Oa]$. La droite $[mm_1]$ est une frontale, et ses perspectives ma, $m'm'_1$ sont parallèles. La droite $O'm'_1$ coupe Oa en μ projection orthogonale de $[m_1]$, et l'on a en grandeur et en signe

$$\frac{a\mu}{aO} = \frac{p}{d}.$$

Si donc on prend $aO = d$ on a une certaine échelle numérique $\frac{1}{N}$; on mesurera ainsi en $a\mu$ la profondeur p à l'échelle $\frac{1}{N}$. On pourra prendre pour N telle valeur que l'on voudra, par exemple celle de l'échelle de la figure géométrale qui définit l'objet ou celle d'un plan de front quelconque.

La droite Oa constitue donc une véritable échelle de profondeur qui permet de résoudre tous les problèmes relatifs aux profondeurs.

9. *Deux droites se couperont et par suite définiront un plan lorsque les points de rencontre de leurs perspectives de même nom seront sur une même ligne de rappel.*

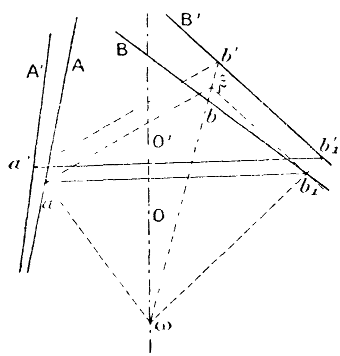
10. *La trace d'un plan est la droite qui joint les traces de deux droites du plan.*

11. PROBLÈME. — *Mener par un point d'un plan la frontale de ce plan.*

Si les traces des droites définissant le plan sont dans le tableau, on aura de suite la trace du plan et par suite la direction de la frontale.

Supposons (*fig.* 4) qu'il n'en soit pas ainsi. Par le

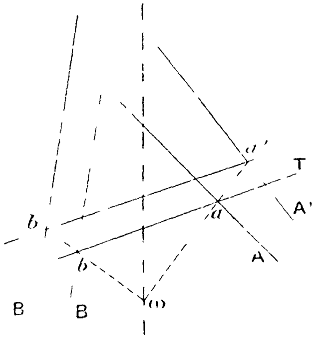
Fig. 4.



point a, a' de (A) menons une frontale quelconque dont la perspective seconde coupe B' au point b'. Par le point $b'\beta$ de cette frontale menons-en une autre B', βb, qui coupe [B] au point $b_1\,b'_1$. Les trois points aa', $b'\beta$, $b_1\,b'_1$ sont dans un même plan de front, donc ab, $a'b'$ est la frontale cherchée.

12. Problème. — *Trouver l'intersection d'un plan* [AB] *et d'un plan fuyant* (*fig.* 5).

Fig. 5.



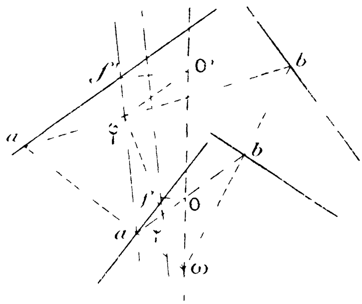
Supposons le plan fuyant déterminé par sa trace T et passant par [O]. Les perspectives premières de tous ces points sont sur T; donc a, b sont celles des points où il coupe [A] [B], par suite l'intersection est ab, $a'b'$.

13. Problème. — *Trouver les lignes de fuite d'un plan.*

Coupons le plan [AB] par un plan debout passant par [O] et de trace Oab, l'intersection des deux plans sera ab, $a'b'$. Le point de fuite de cette droite $\varphi\varphi'$ s'obtiendra en menant $O'\varphi'$ parallèle à Oa. On mènera ensuite par φ et φ' des parallèles aux frontales. Si celles-ci ne sont pas connues on déterminera par la même méthode un second point des lignes de fuite du plan.

Les pieds ff' des perpendiculaires abaissées de O et O′ (*fig.* 6) sur les lignes de fuite sont les points de fuite des droites du plan perpendiculaires aux frontales,

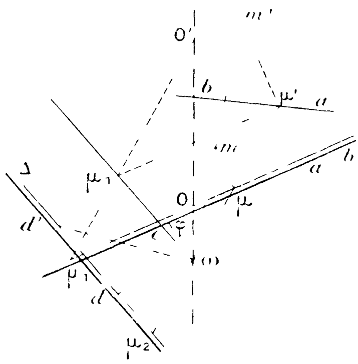
Fig. 6.



droites que, par analogie, nous appellerons *lignes de plus grande pente du plan.*

14. *Echelles de pente d'un plan* (*fig.* 7). — Pour avoir la profondeur d'un point [m] d'un plan, il suffit

Fig. 7.



de prendre celle d'un point quelconque de la frontale qui passe par [m], par exemple le point [μ] qui se trouve sur la droite Oab, $a'b'$ intersection du plan donné et d'un plan debout passant par [O]. Et il suffira de prendre pour échelle de profondeur Oa avec une origine c quelconque.

Les faisceaux $O'\mu'_1\mu_1$ et $O\mu\mu'$ sont homographiques, il existe donc une direction de droites Δ telles que les rayons $O\mu$ interceptent sur elles des segments proportionnels à $C\mu_1$, c'est-à-dire à la profondeur du point [μ].

Pour déterminer une de ces droites Δ, il suffit de remarquer que, si φ est le point de fuite de [ab], son homologue sur Δ doit être à l'infini. Donc Δ est parallèle à $\omega\varphi$, direction toujours connue. Les lignes de rappel des points situés aux profondeurs d et d' sur [ab] sont respectivement parallèles à ab et $a'b'$. Pour avoir Δ il suffira donc de placer entre ces deux droites un segment parallèle à $\omega\varphi$ et égal à $\frac{d-d'}{N}$, $\frac{1}{N}$ étant l'échelle numérique. Cette échelle étant graduée, on aura la profondeur du point μ en le projetant avec ω comme centre en μ_2 sur Δ.

On voit que cette droite Δ jointe à ab définit le plan comme il l'est en Géométrie cotée, au moyen de son échelle de pente, c'est pourquoi nous avons donné ce nom à Δ jointe à ab, $a'b'$.

Remarque. — Cette échelle permet de construire, très simplement, la perspective d'une figure, connaissant les coordonnées de ces points par rapport à deux axes du plan, l'un étant une frontale, l'autre coordonnée étant en effet égale à la profondeur multipliée par une constante.

15. Les éléments que nous savons déjà déterminer sont suffisants pour effectuer les rabattements sur un plan de front; nous allons traiter cette question directement.

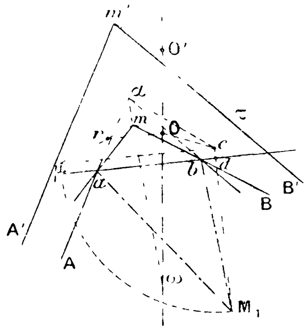
16. On sait que les éléments du rabattement sont le point de fuite des lignes de plus grande pente et le point de fuite des cordes de l'arc que, pour abréger le langage, nous appellerons *point de rabattement du plan,* et nous les désignerons par φ et r.

La connaissance de l'un entraîne celle de l'autre, r est le rabattement de [O] dans le plan de fuite du plan considéré.

Le rabattement autour d'une frontale, sur un plan de front, ayant deux perspectives semblables, il suffit d'en construire une.

17. Proposons-nous de rabattre le point [m], intersection des droites [A][B] autour d'une frontale de leur plan (*fig.* 8). Au moyen des parallèles $a\alpha$, αb à A′ et B′

Fig. 8.



nous déterminons la frontale du point [a] dans le plan [AB]. En menant αc parallèle à O′m' nous avons le point de la droite debout Om, O′m', qui a même profondeur que [a], c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur le plan de front de ab. Le point m devra donc se rabattre sur la perpendiculaire de cd à ad. Pour avoir la distance de [d] à [m], rabattons le plan debout [mcd] autour de sa frontale [cd]. [m] vient en μ, intersection de la perpendiculaire $c\mu$ à cd et de mr, r étant le point de rabattement du plan debout ($Or = d$), en prenant $dM_1 = d\mu$ on a le rabattement de M.

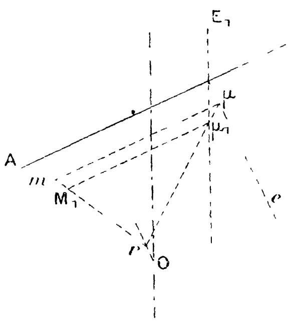
Si l'on joint $M_1 a$, $M_1 b$, nous avons en $aM_1 b$ l'angle des deux droites [A][B].

La perpendiculaire menée de O sur ab coupe les droites md, mM, aux points φ et R.

18. Un point étant rabattu et par suite une droite du plan, on en déduit facilement, au moyen de l'un des points r ou φ, les rabattements de tous les points du plan.

Nous avons indiqué (*fig.* 9) comment, au moyen du

Fig. 9.



point r du rabattement E_1 d'une droite e et de frontales, on peut rabattre tous les points du plan. On verrait facilement que l'on pourrait transformer cette droite en une échelle graduée correspondant au plan.

19. Les éléments que nous venons de déterminer, soit les distances à des plans de front, soit ceux nécessaires pour effectuer les rabattements, permettent d'effectuer toutes les constructions nécessaires pour déterminer les grandeurs des droites et les angles, mener des perpendiculaires, etc. Ces constructions, une fois les éléments précédents déterminés, constituent les constructions directes énoncées dans tous les Traités de Perspective, ou de simples problèmes sur celles-ci; nous ne les traiterons donc pas, nous contentant d'avoir montré que l'on pourrait, au moyen de vues stéréoscopiques, reconstituer très facilement les objets représentés.