NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur une figure de l’espace déduite des polygones de Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 545-549

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__545_1>

[L[1] 17d]

SUR UNE FIGURE DE L'ESPACE DÉDUITE DES POLYGONES DE PONCELET;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Soient S et S′ deux quadriques admettant *abcd* pour tétraèdre conjugué commun, et représentées par les équations

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - t^2 = 0,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - t^2 = 0.$$

Désignons par Σ une quadrique circonscrite à S, de sorte que le plan de contact passe par d : son équation pourra s'écrire :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - t^2 - (\lambda x\sqrt{A - A'} + \mu y\sqrt{B - B'} + \nu z\sqrt{C - C'})^2 = 0;$$

cette quadrique Σ coupe la quadrique S' suivant une courbe située sur le cône d'équation

$$(A - A')x^2 + (B - B')y^2 + (C - C')z^2 \\ + (\lambda x\sqrt{A - A'} + \mu y\sqrt{B - B'} - \nu z\sqrt{C - C'})^2 = 0,$$

cône de sommet d. Ce cône se décomposera en deux plans si l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ \mu\lambda & 1 + \mu^2 & \mu\nu \\ \nu\lambda & \nu\mu & 1 + \nu^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 1 = 0,$$

et ces deux plans auront alors pour équations

$$x\sqrt{A - A'}(1 + \lambda^2) + y\sqrt{B - B'}(\lambda\mu \pm \nu) \\ + z\sqrt{C - C'}(\lambda\nu \mp \mu) = 0.$$

Ces plans, qui paraissent dépendre de deux paramètres λ et μ, sont néanmoins tangents à un cône fixe; en effet, leurs coordonnées sont

$$u = \sqrt{A - A'}(1 + \lambda^2),$$
$$v = \sqrt{B - B'}(\lambda\mu \pm \nu),$$
$$w = \sqrt{C - C'}(\lambda\nu \mp \mu),$$

ce qui donne, en tenant compte de la relation (1),

$$\frac{u^2}{A - A'} + \frac{v^2}{B - B'} + \frac{w^2}{C - C'} = 0;$$

on voit donc que : *Si Σ est bitangente à S', les plans de leurs courbes communes touchent le cône* **D**, *de* *sommet d, qui passe par l'intersection des quadriques* S *et* S′ (¹).

Désignons de même par Σ' une quadrique circonscrite à S′, le pôle du plan de contact étant dans le plan *abc* ou, ce qui revient au même, ce plan passant encore en *d*. En transformant le résultat précédent par dualité, on voit que : *Si* Σ' *est bitangente à* S, *les sommets des deux cônes circonscrits à la fois à ces quadriques appartiennent à la conique d du plan* ABC, *qui touche les plans tangents communs à* S *et* S′.

2. Supposons maintenant que Σ soit un cône bitangent à S′ ; il coupera S′ suivant deux coniques dont le plan sera tangent au cône D ; chacune de ces deux coniques peut donc être considérée comme une des quadriques Σ' envisagées précédemment, et il en résulte que le sommet de Σ est sur *d*. Ainsi donc :

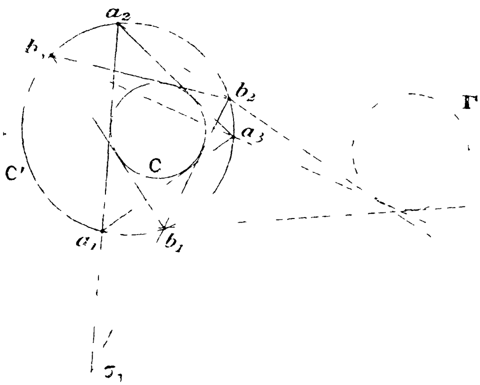
Si l'on prend un point quelconque sur d et un plan tangent à D, *le point est le sommet d'un cône* Σ *circonscrit à* S, *et le plan coupe* S′ *suivant une conique* Σ' : *sous une condition unique, le cône* Σ *passe par la conique* Σ', *et il existe évidemment entre le sommet de* Σ *et le plan de* Σ' *une correspondance doublement quadratique.*

3. Représentons sur le plan *abc* les traces C, C′ et Γ des quadriques S, S′ et du cône D. Soit Σ'_1 une conique de S′, dont le plan touche le cône D ; elle coupe

(¹) Ce théorème résulte immédiatement de ce que les plans qui coupent deux quadriques suivant des coniques bitangentes touchent un cône de leur faisceau ponctuel.

Remarque analogue pour le théorème corrélatif. (E. D.)

le plan abc en deux points a_1 et b_1 de C' tels que la droite $a_1 b_1$ touche Γ. Par cettte conique il passe, d'après ce qui précède, deux cônes circonscrits à S, et dont les sommets sont sur la conique d; soit σ_1 le sommet de l'un de ces cônes : les droites $\sigma_1 a_1$ et $\sigma_1 b_1$ toucheront la conique C. Ce cône coupera S' suivant une autre conique Σ'_2, dont le plan aura pour trace la droite $a_2 b_2$, a_2 et b_2 étant les points où les droites $\sigma_1 a_1$ et $\sigma_1 b_1$ coupent à nouveau C'. Par Σ'_2 passe un second cône Σ_2, circonscrit à S, qui coupe S' suivant une autre



conique Σ'_3, les traces a_3 et b_3 de celle-ci s'obtenant en prenant les points où C' coupe les tangentes qu'on peut encore amener à C par les points a_2 et b_2, et ainsi de suite.

S'il existe des polygones de n côtés inscrits à C' et circonscrits à C, la droite $a_n b_n$ viendra coïncider avec $a_1 b_1$. (Dans la figure on suppose $n = 3$.)

On a donc le théorème suivant :

Soit Σ'_1 une conique de S', dont le plan touche le cône D, et Σ_1 l'un des deux cônes circonscrits à S qu'on *peut mener par cette conique; il coupe* S′ *suivant une autre conique* Σ'_2 ; *par* Σ'_2 *passe un second cône,* Σ_2, *circonscrit à* S, *et qui coupe* S′ *suivant une autre conique* Σ'_3, *et ainsi de suite. S'il existe des polygones de n côtés inscrits à la conique* C′ *et circonscrits à la conique* C (C *et* C′ *étant les traces de* S *et* S′ *sur le plan abc*), *le cône* Σ_n *vient passer par la conique initiale* Σ'_1.