

MAURICE D'OCAGNE

**Sur la résolution nomographique des
équations algébriques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 49-57

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2_49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[X3a]

**SUR LA RÉOLUTION NOMOGRAPHIQUE
DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES;**

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

C'est à l'occasion de cette résolution que nous avons énoncé pour la première fois ⁽¹⁾ en 1884 le principe de la *méthode des points alignés*, qui se trouve exposée très en détail dans les Chapitres III et V de notre *Traité de Nomographie* ⁽²⁾. Or, cette application particulière peut être dégagée de la théorie générale à laquelle elle se rattache pour être présentée sous la forme suivante immédiatement accessible à tout élève de Mathématiques spéciales.

I. — SYSTÈMES DE POINTS A UNE ET A DEUX COTES.

1. Si les coordonnées d'un point sont données en fonctions d'un paramètre z par des formules telles que

$$x = f(z), \quad y = \varphi(z),$$

on peut figurer un certain nombre de ces points correspondant à des valeurs de z comprises entre certaines limites *en inscrivant à côté de chacun d'eux la valeur de z qui a servi à l'obtenir*. On a ainsi un système de *points à une cote*. Ces points sont distribués sur la ligne, dite leur *support*, dont l'équation s'obtiendrait

⁽¹⁾ *Annales des Ponts et Chaussées*, 2^e semestre, p. 531. Cette Note a été reproduite dans notre brochure : *Coordonnées paraboliques et axiales*, p. 73 (Paris, Gauthier-Villars; 1885).

⁽²⁾ Paris, Gauthier-Villars; 1899.

par l'élimination de z entre les expressions de x et y . Si les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ dépendent linéairement l'une de l'autre, ce support est une ligne droite.

2. Considérons de même un point dont les coordonnées dépendent de deux paramètres z et t par les formules

$$x = f(z, t), \quad y = \varphi(z, t).$$

Si l'on donne à t une certaine valeur fixe, on obtient un système de points distribués sur une ligne (t) dont l'équation résulterait de l'élimination de z entre les expressions de x et y . De même, en laissant z fixe et faisant varier t , on obtient une ligne (z). Ayant construit un certain nombre de lignes (z) et (t), en ayant soin d'inscrire sa cote à côté de chacune d'elles, on a un réseau dans lequel chaque point est défini par les cotes des lignes (z) et (t) qui s'y croisent. Ces points sont dits des *points à deux cotes*.

Indépendamment des points effectivement marqués dans un système, soit à une, soit à deux cotes, on peut, par interpolation à vue, se figurer ceux qui correspondent à des cotes intermédiaires.

II. - RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE LA FORME

$$z^m + u z^p + v = 0.$$

3. Une telle équation peut s'écrire ⁽¹⁾

$$\begin{vmatrix} -1 & u & 1 \\ 1 & v & 1 \\ 1 - z^p & -z^m & 1 + z^p \end{vmatrix} = 0.$$

(1) Comme on peut s'en assurer en se reportant aux endroits cités, c'est l'usage des coordonnées tangentiels spéciales que nous avons appelées *parallèles* qui conduit le plus naturellement à cette transformation.

Elle exprime l'alignement des trois points

$$\begin{aligned} (u) \quad & x = -1, & y = u, \\ (v) \quad & x = 1, & y = v, \\ (z) \quad & x = \frac{1-z^p}{1+z^p}, & y = \frac{-z^m}{1+z^p}. \end{aligned}$$

Ces trois couples de formules définissent trois systèmes à une cote, savoir : les points (u) et (v) distribués sur deux parallèles équidistantes de OJ , les points (z) distribués sur une courbe algébrique C définie par les expressions correspondantes de x et y .

Il est d'ailleurs facile, par l'élimination de z , de former l'équation de cette courbe d'ordre m , qui est

$$(-2y)^p(1+x)^{m-p} = (1-x)^m.$$

L'ensemble des trois systèmes à une cote (u) , (v) et (z) constitue un *nomogramme* ⁽¹⁾ à points alignés de l'équation donnée. Pour résoudre l'équation au moyen de ce nomogramme, on voit qu'il suffit de joindre les points cotés u et v par une droite qui coupe la courbe C en des points dont les cotes z sont les racines de l'équation.

Remarquons qu'il suffit de construire les points de la courbe C pour des valeurs positives de z , les valeurs absolues des racines négatives de l'équation s'obtenant immédiatement comme racines positives de la transformée en $-z$.

4. Prenons en particulier l'équation générale du second degré

$$z^2 + uz + v = 0,$$

(1) Terme étymologiquement plus général que celui d'*abaque*, auquel il a été substitué par M. Schilling.

qui rentre dans le type précédent lorsqu'on y fait $m = 2$, $p = 1$.

Si nous appelons AA' et BB' les droites $x = -1$ et $x = 1$ qui servent, dans tous les cas, de supports aux systèmes (u) et (v) , droites qui rencontrent l'axe Ox aux points A et B , on voit que la courbe C , dont l'équation, donnée ci-dessus, devient ici

$$-2y(1+x) = (1-x)^2,$$

est une hyperbole tangente en B à Ox , ayant AA' pour asymptote et coupant l'axe Oy au point d'ordonnée $y = -\frac{1}{2}$, ce qui la définit complètement. D'ailleurs, les expressions de x et de y , qui sont ici

$$x = \frac{1-z}{1+z}, \quad y = \frac{-z^2}{1+z},$$

montrent : 1° que la portion de l'hyperbole C correspondant aux valeurs positives de z est tout entière au-dessous de Ox , entre AA' et BB' ; 2° que le pied M de l'ordonnée du point P coté z divise AB dans le rapport $\frac{MB}{AM} = z$; 3° que la droite BP coupe AA' en un point dont l'ordonnée est $y = -z$.

Ces deux dernières propriétés donnent une construction facile des points (z) . C'est ainsi qu'a été obtenu le nomogramme représenté par la figure 1.

III. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE LA FORME

$$z^m + tz^n + uz^p + v = 0.$$

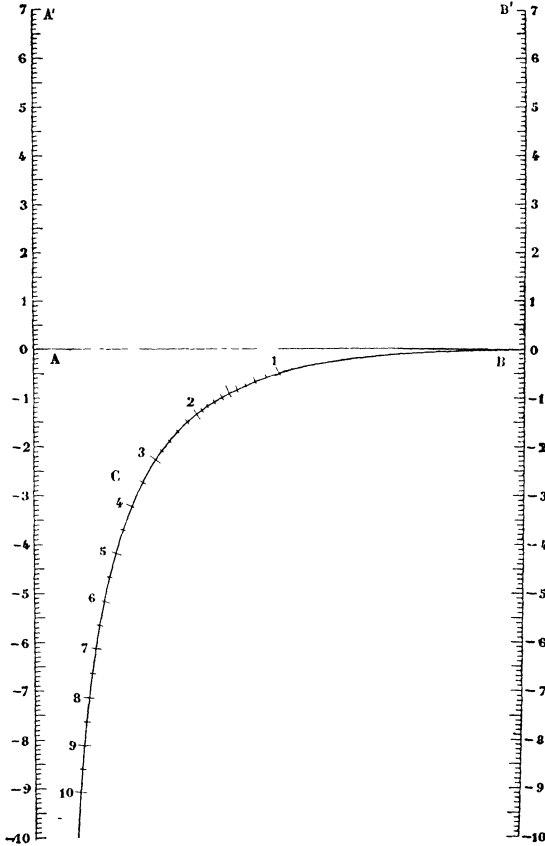
§. Une telle équation peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -1 & u & 1 \\ 1 & v & 1 \\ 1 - z^p & z^m + tz^n & 1 + z^p \end{array} \right\} = 0.$$

Elle exprime l'alignement des trois points

$$\begin{aligned}
 (u) \quad & x = -1, & y = u, \\
 (v) \quad & x = 1, & y = v, \\
 (z, t) \quad & x = \frac{1 - z^p}{1 + z^p}, & y = \frac{-(z^m + t z^n)}{1 + z^p}.
 \end{aligned}$$

Fig. 1.



Les points à une cote (u) et (v) sont les mêmes que dans le cas précédent. Ils sont distribués sur les parallèles AA' ($x = -1$) et BB' ($x = 1$) à Oy .

Les points (z, t) sont à deux cotes. Mais on peut observer que, l'expression de leur x ne renfermant pas t , les lignes (z) du réseau (z, t) sont tout simplement des parallèles à Oy . En outre, les courbes C_t , d'ordre m , correspondant aux diverses valeurs de t , se déduisent très facilement de celle d'entre elles, C_0 , qui correspond à $t = 0$, et qui n'est autre que la courbe C du n° 3.

En effet, les points des diverses courbes C_t situés sur une même parallèle (z) à Oy sont donnés par

$$y = \frac{z^m}{1 - z^p} - t \frac{z^t}{1 - z^p},$$

ou, en appelant y_0 l'ordonnée du point de C_0 situé sur cette ligne (z) et remarquant que $\frac{z^m}{1 - z^p}$ est une constante τ par rapport à cette ligne z ,

$$y = y_0 - t\tau.$$

Ayant donc calculé les τ correspondant aux diverses valeurs de z , on voit que, une fois tracée la courbe C_0 , la construction des autres courbes C_t est immédiate.

L'ensemble des points à une cote (u) et (v) et des points à deux cotes (z, t) définis par le réseau des parallèles (z) à Oy et des courbes C_t , constitue le *nomogramme* de l'équation proposée.

Quand ce nomogramme est construit, on résout l'équation en joignant par une droite les points cotés u et v et prenant les cotes z des parallèles à Oy passant par les points où cette droite coupe la courbe C_t .

Comme dans le cas précédent, on remarquera que l'on peut se borner à construire le nomogramme pour les valeurs positives de z .

6. Prenons en particulier l'équation complète du

troisième degré ⁽¹⁾

$$z^3 + tz^2 + uz + v = 0,$$

qui rentre dans le type précédent quand on y fait $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$.

Les points (u) et (v) sont les mêmes que précédemment, distribués sur les droites AA' et BB' ; quant aux courbes C_t , elles sont définies par les équations

$$x = \frac{1-z}{1+z}, \quad y = -\frac{z^3-tz^2}{1-z}.$$

La première de ces équations définit d'ailleurs les lignes (z) , qui ne sont autres que les parallèles à Oy menées par les points (z) du nomogramme du n^o 4 (*fig. 1*).

Pour obtenir sur chacune de ces lignes (z) les points des diverses courbes C_t , il suffit, après avoir posé

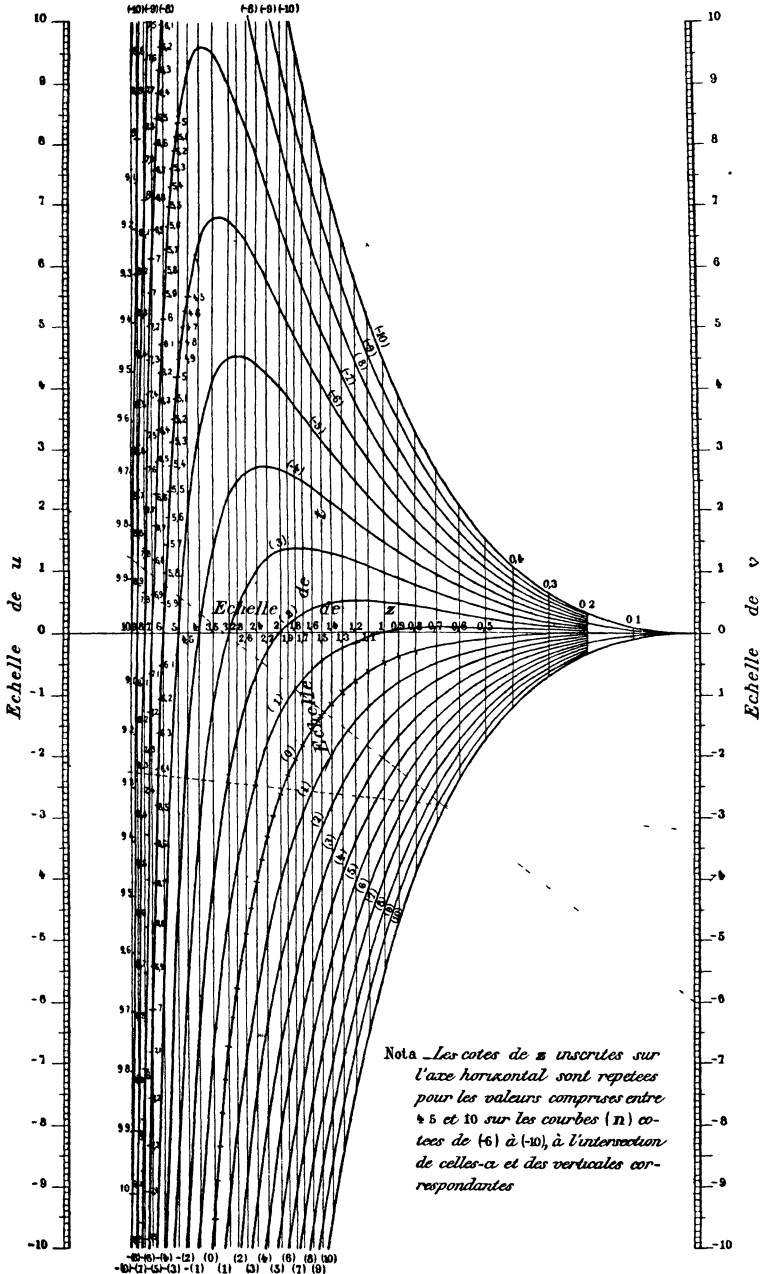
$$y_0 = \frac{-z^3}{1-z}, \quad \tau_t = \frac{-z^2}{1+z},$$

de remarquer, comme on vient de le faire dans le cas général, que, une fois construite, la courbe C_0 définie par l'ordonnée y_0 , on a, sur chaque ligne (z) , les points des courbes correspondant à $t = 1, 2, 3, \dots$ en ajoutant à l'ordonnée y_0 , une fois, deux fois, trois fois, \dots l'ordonnée τ_t qui n'est autre que celle de l'hyperbole construite pour le nomogramme précédent.

La courbe C_0 est d'ailleurs une cubique cuspidale ayant son point d'inflexion en B, où la tangente se con-

(1) Pour l'extension de la méthode jusqu'au septième degré, voir les Notes que nous avons publiées dans les *Comptes rendus* (t. CXXXI, p. 522) et le *Bull. des Sc. math.* (2^e série, t. XXIV, p. 286).

Fig 2



fond avec Ox , et son point de rebroussement à l'infini sur la partie négative de AA' (1).

C'est ainsi qu'a été obtenu le nomogramme représenté par la figure 2, sur laquelle on a indiqué en pointillé les positions de l'index se rapportant à la résolution des équations

$$z^3 + 2z - 6 = 0, \quad z^3 + z^2 - 2,16z - 3,2 = 0,$$

pour lesquelles le nomogramme donne respectivement

$$z = 1,46 \quad \text{et} \quad z = 1,6.$$

Remarque. — On peut, pour construire le système (t), porter sur chaque droite (z) les ordonnées η à partir de l'une quelconque des courbes C_t , tracée d'abord. En particulier, on peut partir de la courbe C_1 définie par l'ordonnée

$$y = -\frac{z^3 + z^2}{1 + z} = -z^2,$$

que fournit immédiatement une simple Table de carrés.