

TSURUICHI HAYASHI

**Expressions de $\tan^n \alpha$ et $\cot^n \alpha$ sous
forme de continuants**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 496-499

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2_496_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[B1]

**EXPRESSIONS DE $\text{tang}^n \alpha$ ET $\text{cot}^n \alpha$ SOUS FORME
DE CONTINUANTS;**

PAR M. TSURUICHI HAYASHI, à Tokio.

En posant

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= p, & \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} &= u_n, \\ \alpha\beta &= q, & \alpha^n + \beta^n &= v_n, \end{aligned}$$

on a les deux formules de récurrence

$$u_{n+2} = pu_{n+1} - qu_n,$$

$$v_{n+2} = pv_{n+1} - qv_n;$$

par suite

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p & q & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{vmatrix} \quad (\text{déterminant d'ordre } n - 1)$$

et

$$\alpha^n + \beta^n = \begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & p & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p & q & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{vmatrix} \quad (\text{déterminant d'ordre } n).$$

Supposons $p = 2\zeta$ et $q = 1$; les formules précédentes deviennent

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^n - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n \\ = 2 \begin{vmatrix} \sqrt{\zeta^2 - 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda\zeta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda\zeta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda\zeta & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\zeta \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{d'ordre } n).$$

et

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^n + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n \\ = 2 \begin{vmatrix} \zeta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\zeta \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{d'ordre } n).$$

En ajoutant et retranchant, on en tire

$$(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^n = \begin{vmatrix} \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\zeta \end{vmatrix} \quad (\text{d'ordre } n)$$

et

$$(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n = \begin{vmatrix} \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\zeta \end{vmatrix}.$$

En posant dans ces relations

$$\zeta = \sqrt{-1} \cot 2\alpha,$$

et en se servant du théorème mentionné par M. C.-A. Laisant dans les *Archiv d. Math. u. Physik*, t. III, 1^{re} série, p. 370, on trouve aisément

$$\cot^n \alpha = \begin{vmatrix} \cot \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 \cot 2\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 \cot 2\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cot 2\alpha \end{vmatrix}$$

et

$$\tan^n \alpha = \begin{vmatrix} \tan \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -2 \cot 2\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -2 \cot 2\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \cot 2\alpha \end{vmatrix}.$$

De même, en posant

$$\zeta = \cos \alpha$$

on pourrait obtenir

$$\cot^n x = \begin{vmatrix} \cot x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \operatorname{cosec} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 \operatorname{cosec} 2x & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \operatorname{cosec} 2x \end{vmatrix}$$

et

$$\operatorname{tang}^n x = \begin{vmatrix} \operatorname{tang} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \operatorname{cosec} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 \operatorname{cosec} 2x & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \operatorname{cosec} 2x \end{vmatrix}$$

Ces formes de $\cot^n x$ et $\operatorname{tang}^n x$ sont aussi remarquables que celles qui ont été trouvées par M. Studnicka pour $\cos nx$ et $\frac{\sin nx}{\sin x}$ (PASCAL, *Die Determinanten*, p. 155-156, traduction allemande du Dr Leitzmann), et qui peuvent être déduites de (2) et (1) en posant

$$\zeta = \cos x.$$