NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 468-473

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__468_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

COMPOSITION ÉCRITE. — *Un cylindre de révolution, de rayon* R, *est représenté par les équations*

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi.$$

Dans le plan xOy, *on donne la conique*

$$x^2 + y^2 - R^2 = (x - R\cos\theta)^2 K^2.$$

On demande :

1° *De déterminer les courbes tracées sur le cylindre, telles que leurs tangentes rencontrent la conique. On* *pourra chercher la relation différentielle qui lie z à φ, et intégrer cette équation.*

2° *Examiner, en particulier, le cas où $\theta = 0$.*

3° *Que deviennent les formules générales lorsque* $\theta = \frac{\pi}{2}$, $K > 1$. *Dans ce cas, en supposant l'une des courbes limitée aux deux points où elle coupe la base du cylindre dans le plan des xy, calculer l'aire de la surface du cylindre comprise entre cette courbe et la circonférence de base du cylindre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - (1-a)x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a\left(x \frac{dy}{dx} - y\right) = bx + cx^2.$$

(Montpellier, juillet 1901.)

COMPOSITION. — *Trouver une surface de révolution telle que la somme, ou la différence, des rayons principaux de courbure soit constante en chacun de ses points (deux questions). Cas particuliers où la surface rencontre tangentiellement, ou normalement, l'axe de révolution.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une surface réglée Σ est engendrée par une droite G qui se meut d'une façon déterminée en rencontrant constamment une directrice donnée D. On demande :*

1° *L'équation du plan tangent à Σ en un point M de G, et, en particulier, au point central relatif à cette génératrice;*

2° *D'exprimer la condition pour que Σ soit développable;*

3° *De déterminer la ligne de striction de Σ, en général, et dans les cas particuliers où G est, ou tangente, ou normale principale, ou binormale à la courbe D.*

(Grenoble, juillet 1901.)

I. *Une surface étant définie en coordonnées semi-polaires par l'équation $z = f(r, \theta)$, former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface projetées sur le plan xOy. Démontrer que la condition pour que l'un des* *systèmes de ces lignes se projette suivant des droites concourantes à l'origine est que la fonction $f(r, \theta)$ soit linéaire par rapport à r.*

II. Application. — *Recherche des lignes asymptotiques de la surface définie par l'équation*

$$z = r\cos\theta - \frac{ae\sin\theta}{(1-e^2)(1+e\cos\theta)}$$
$$+ \frac{2a}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right).$$

Solution.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface définie par les équations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = f(r, \theta)$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} d^2x & x'_r & x'_\theta \\ d^2y & y'_r & y'_\theta \\ d^2z & z'_r & z'_\theta \end{vmatrix} = 0,$$

et, après qu'on a exprimé qu'elle admet la solution $d\theta = 0$, qui correspond aux droites passant par l'origine, elle se réduit à

$$d\theta\left[2\,dr(rf''_{r,\theta} - f'_\theta) + d\theta(rf'_r + f''_\theta)r\right] = 0.$$

Dans le cas proposé, cette équation devient

$$d\theta\left(\frac{dr}{r} - \frac{e\sin\theta\,d\theta}{1+e\cos\theta}\right) = 0,$$

qui donne les deux systèmes suivants :

$$\theta = c, \qquad r = \frac{p}{1-e\cos\theta},$$

c et p étant deux constantes arbitraires.

Calcul de l'intégrale $u = \int \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$.

SOLUTION.

Posant

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = x \qquad \text{et} \qquad \frac{1+e}{1-e} = a^2,$$

on aura

$$u = \frac{2}{(1-e)^2}\int\frac{(1+x^2)}{(x^2+a^2)^2}\,dx,$$

qui, par décomposition en fractions simples, donnera

$$u = \frac{(1-a^2)x}{a^2(1-e)^2(x^2+a^2)} - \frac{i}{(1+e)(1-e)^2 a}\log\frac{x-ai}{x+ai},$$

ou bien

$$u = -\frac{2ex}{(1-e^2)[1+e+(1-e)x^2]}$$
$$+\frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

avec

$$x = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

(Grenoble, novembre 1901.)

I. QUESTION DE COURS. — *Énoncer et démontrer les principales propriétés des séries dont les termes sont des fonctions d'une variable complexe, holomorphes dans une aire donnée.*

II. PROBLÈME. — *Déterminer les courbes planes dont le rayon de courbure* R *est en chaque point proportionnel à une puissance impaire* $(2p+1)$ *de la portion de normale* N *comprise entre ce point de la courbe et une droite fixe* Δ

$$R = m\,N^{2p+1}.$$

Traiter en detail les cas suivants :

1° $\qquad p = 1,$

2° $\qquad p = 0, \qquad m = \pm 1 \qquad$ *et* $\qquad m = \pm 2,$

où l'intégration peut être faite complètement.

Ce problème est résolu dans plusieurs Traités, en particulier dans celui de M. Jordan (t. III, p. 62).

(Lille, novembre 1901.)

Épreuve écrite. — I. *$f(x, \alpha)$ désignant une fonction donnée des deux variables x, α, et a, b étant des constantes ou, plus généralement, des fonctions données de α, énoncer et justifier la règle de Leibniz relative au calcul de la dérivée de la fonction de α définie par l'intégrale*

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

II. *Intégrer le système d'équations différentielles*

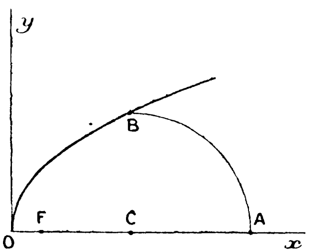
$$\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x\sqrt{3} = \sin t,$$
$$\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} + y\sqrt{3} = \sin t,$$
$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + z\sqrt{3} = \sin t.$$

III. *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation*

$$x^2 y^2 z + x^2 - y^2 = 0,$$

et montrer que ce sont des cubiques gauches.

Épreuve pratique. — *Calculer l'aire et les coordonnées du centre de gravité du triangle curviligne* OAB *compris*



entre l'axe des x, l'arc OB *de la parabole $y^2 - 2ax = 0$, et l'arc* AB *du cercle $x^2 + y^2 - 4ax = 0$, les axes étant rectangulaires.*

(Toulouse, novembre 1901.)

Épreuve écrite. — *$Oxyz$ étant des axes rectangulaires, un point M décrit une surface jouissant de la propriété suivante : La normale au point M à la surface coupe le plan xOy en un point P tel que $PM = PO$.*

On demande de :

1° *Former l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces;*

2° *Intégrer cette équation et former l'équation générale des surfaces considérées;*

3° *Déterminer les lignes de courbure de l'une quelconque de ces surfaces, et montrer que l'un des systèmes de lignes de courbure est formé de circonférences situées dans des plans passant par l'axe Oz;*

4° *Montrer que, pour une surface particulière, le point P décrit une courbe du plan xOy, qui peut être quelconque, et déterminer la surface particulière telle que cette courbe ait pour équation*

$$y = ae^{-x}.$$

Épreuve pratique. — *On donne l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et le paraboloïde

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x - \lambda}{\mu - \lambda} \frac{a^2 - \mu^2}{a^2}$$

rapportés à des axes de coordonnées rectangulaires. On suppose

$$-a < \lambda < \mu < +a.$$

1° *Montrer que ces deux surfaces se coupent suivant une ellipse située dans le plan $x = \mu$, et que le paraboloïde divise le volume de l'ellipsoïde en deux parties;*

2° *Évaluer les deux portions du volume de l'ellipsoïde limitées par le paraboloïde;*

3° *Déterminer λ de façon que l'ellipsoïde soit divisé en deux volumes équivalents.*

(Montpellier, juillet 1902.)