

MAURICE FRÉCHET

**Généralisation du théorème de Tissot**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1902), p. 446-448

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1902\\_4\\_2\\_\\_446\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__446_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[P5]

**GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE TISSOT;**

PAR M. MAURICE FRÉCHET,

Élève de l'École Normale supérieure.

---

THÉORÈME. — *Étant donnée une correspondance PONCTUELLE quelconque entre trois surfaces  $S_1, S_2, S_3$ , il existe EN GÉNÉRAL quatre couples de familles de courbes sur  $S_1$  telles que les angles sous lesquels se coupent deux courbes d'un même couple soient conservés dans la correspondance.*

En effet, nous supposons la correspondance telle qu'on puisse exprimer les coordonnées de trois points

correspondants  $M_1$  sur  $S_1$ ,  $M_2$  sur  $S_2$ ,  $M_3$  sur  $S_3$  au moyen des deux mêmes paramètres  $u, v$ . Soient alors  $m_1, m'_1; m_2, m'_2; m_3, m'_3; n, n'$  les valeurs de  $\frac{du}{dv}$  pour les tangentes isotropes à  $S_1$  et  $M_1$ , les transformées des tangentes isotropes à  $S_2$  en  $M_2$  et à  $S_3$  en  $M_3$ , et pour les tangentes  $M_1 T_1, M_1' T_1'$ , à deux courbes de  $S_1$  passant en  $M_1$ . Soient, de plus,  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  les angles de  $M_1 T_1, M_1' T_1'$  et des tangentes aux courbes correspondantes. On aura :

$$e^{2i\Lambda_1} = (m_1, m_1, n, n'),$$

$$e^{2i\Lambda_2} = (m_2, m_2, n, n'),$$

$$e^{2i\Lambda_3} = (m_3, m_3, n, n').$$

On peut considérer  $m_1, m'_1; m_2, m'_2; m_3, m_3; n, n'$  comme racines des équations respectives :

$$x^2 - 2p_k x - q_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad x^2 - 2x + \beta = 0.$$

En posant

$$r_k = \sqrt{p_k^2 - q_k}, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta},$$

on aura

$$(1) \quad e^{2i\Lambda_k} = \frac{m_k - n}{m_k - n} : \frac{m_k - n'}{m_k - n} - 1 + \frac{r_k \gamma}{(p_k - \alpha)^2 - (r_k - \gamma)^2}.$$

On aura alors les courbes cherchées par les équations

$$e^{i\Lambda_1} = e^{i\Lambda_2} = e^{i\Lambda_3},$$

qui deviennent, en tenant compte de (1),

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{p_1^2 - p_2^2 - r_2^2 - r_1^2}{r_1 - r_2} - \frac{p_1^2 - p_3^2 - r_3^2 - r_1^2}{r_1 - r_3} \\ = 2\alpha \left( \frac{p_2 - p_1}{r_2 - r_1} - \frac{p_3 - p_1}{r_3 - r_1} \right), \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{(p_1 - \alpha)^2 - r_1^2}{r_1} - \frac{(p_2 - \alpha)^2 - r_2^2}{r_2} = \gamma^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

De (2) on tire *une* valeur de  $\alpha$ , et en portant dans (3) on en tire *une* valeur de  $\gamma^2$ , donc de  $\beta = \alpha^2 - \gamma^2$ .

D'ailleurs, il n'y a que quatre combinaisons de signes des quantités  $r_i$  donnant des systèmes différents de valeurs pour  $\alpha$  et  $\beta$ , car on obtient les mêmes expressions de  $\alpha$  et  $\beta$  en changeant de signe tous les  $r_i$ . A chaque combinaison correspond un seul couple de tangentes, ce qui démontre le théorème.

Il y aura une infinité de couples de familles satisfaisant aux conditions dans le seul cas où la correspondance serait une représentation géographique de l'une des surfaces sur l'une au moins des deux autres.