NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. BIENAYMÉ

Sur un problème de substitutions étudié par Monge

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 443-446

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__443_0>

[J4]

SUR UN PROBLÈME DE SUBSTITUTIONS ÉTUDIÉ PAR MONGE;

PAR M. LE LIEUTENANT A. BIENAYMÉ.

Monge a présenté à l'Académie des Sciences une *Note sur un tour de cartes,* insérée dans les *Mémoires des Savants étrangers* (t. VII, 1773); ce tour repose sur la façon suivante de mêler les cartes.

Soit n un nombre *pair* de cartes, rangées dans l'ordre

$$(1) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n;$$

on prend la première, on place la deuxième *au-dessus,* la troisième au-dessous, la quatrième au-dessus, et ainsi de suite; on obtient ainsi la suite

$$(2) \qquad n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-1.$$

On observe que certaines cartes peuvent conserver leur place primitive, ou que plusieurs permutent de rang entre elles; par exemple, pour $n=10$, les suites (1) et (2) sont les suivantes :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ 10, & 8, & 6, & 4, & 2, & 1, & 3, & 5, & 7, & 9. \end{array}$$

La substitution qui permet de passer de la première à la deuxième est le produit des substitutions circulaires

$$(1, 10, 9, 7, 3, 6)\,(2, 8, 5)\,(4).$$

On voit que, si l'on soumet à cette substitution la $2^{\text{ième}}$ suite, puis la $3^{\text{ième}}$ suite qui en résultera, et ainsi de suite, le terme 4 restera toujours inaltéré, les termes 2, 8, 5 se reproduiront après trois opérations, et les autres après six opérations. Après six opérations, on retombera évidemment sur la suite initiale.

Dans sa Note, Monge traite particulièrement des conditions que doit remplir le nombre pair n pour qu'une carte reste à la même place, ou pour que 2, 3, 4 ou 5 cartes permutent entre elles, et, dans ces divers cas, il calcule le rang des cartes singulières en fonction de n.

Nous nous proposons ici de déterminer le nombre d'opérations au bout desquelles une carte quelconque se reproduit, et d'en déduire celui au bout desquelles se reproduit la suite initiale tout entière. Mais, auparavant, nous allons étendre le problème au cas où n est *impair*.

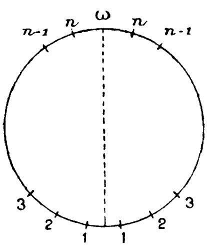
Si, en effet, dans ce cas, nous plaçons la deuxième carte *au-dessous* de la première, puis la troisième au-dessus, et ainsi de suite, nous passerons de la suite

$$(1)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

à la suite

$$(2')\qquad n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots,\ 1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-1.$$

Une même représentation géométrique [1] va nous



permettre de passer de la suite (1) à la suite (2) ou à la

[1] Cet exposé nous a été indiqué par M. Duporcq, ainsi que l'extension du problème au cas où n est impair.

suite (2′), suivant la parité de n. Considérons un polygone régulier de $2n+1$ côtés (convexe ou étoilé), et numérotons ses sommets successifs

$$\omega,\quad n,\quad n-1,\quad n-2,\quad \ldots,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1,\quad n.$$

A chaque sommet de ce polygone, α, par exemple, substituons le sommet β tel que l'arc $\omega\beta$ soit double de l'arc $\omega\alpha$. Aux sommets numérotés

$$(1)\qquad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n$$

nous substituerons ainsi les sommets numérotés

$$(2)\qquad n,\quad n-2,\quad n-4,\quad \ldots,\quad 2,\quad 1,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1$$

si n est *pair*, ou bien

$$(2')\qquad n,\quad n-2,\quad n-4,\quad \ldots,\quad 1,\quad 2,\quad 4,\quad \ldots,\quad n-1$$

si n est *impair*.

On déduit de là que, si l'on répète k fois cette opération, au nombre p se substituera le nombre p_k, inférieur ou égal à n, défini par l'égalité

$$(n+p)\,2^k = \text{mult.}(2n+1) \pm (n+p_k).$$

On aura donc

$$p_k = p$$

si

$$(a)\qquad (n+p)(2^k \pm 1) = \text{mult.}(2n+1),$$

et le plus petit exposant k satisfaisant à cette condition représentera le nombre d'opérations nécessaires pour que la p^{ieme} carte reprenne sa place.

On voit que, si $n+p$ et $2n+1$ sont premiers entre eux, ce qui a lieu, en particulier, pour $p=1$, il faudra que

$$(b)\qquad 2^k \pm 1 = \text{mult.}(2n+1).$$

Le nombre ainsi défini satisfera nécessairement à l'égalité (a), et l'on voit donc que :

Lorsque la première carte reprendra sa place, il en sera de même de toutes; ce résultat sera atteint au bout de k opérations, k étant l'exposant de la plus petite puissance de 2, qui diffère d'une unité d'un multiple de $2n+1$.

Remarque. — Si $2n+1$ est premier, toutes les cartes se reproduiront au bout du même nombre k d'opérations; chacune d'elles appartiendra donc à une permutation circulaire comprenant k termes, et par suite le nombre n sera divisible par k; par suite, l'un des deux nombres $2^n \pm 1$ sera divisible par 2^n+1, et par conséquent aussi leur produit $2^{2n}-1$: c'est un cas particulier du *théorème de Fermat*.