NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CARVALLO

Conférence sur les notions de calcul géométrique utilisées en mécanique et en physique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 433-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__433_0>

[B12] [R3]

CONFÉRENCE SUR LES NOTIONS DE CALCUL GÉOMÉTRIQUE UTILISÉES EN MÉCANIQUE ET EN PHYSIQUE;

Par M. E. CARVALLO,
Examinateur des élèves à l'École Polytechnique.

1. *Introduction.* — Vous connaissez les *vecteurs,* vous avez vu l'importance de cette notion en Géométrie et en Mécanique. D'autres notions s'imposent aussi impérieusement à la suite des vecteurs en Géométrie, en Mécanique, en Physique. Ce sont :

Le *cycle,* ou surface douée, comme on va voir, de direction et de sens. Il peut être regardé comme le produit de deux vecteurs, produit que j'affecte du qualificatif *superficiel* pour le distinguer d'autres espèces de produits.

Le *flux,* ou volume doué de signe. Il peut être regardé comme le produit d'un élément superficiel par un vecteur, ou le produit de trois vecteurs.

Je vais expliquer ces notions, la correspondance qui existe entre les cycles et les vecteurs, déduire de cette correspondance les notions si utiles de produit algébrique et de produit vectoriel de deux vecteurs.

En outre, je vous donnerai un ensemble de notations et conventions. D'une façon générale, j'adopterai celles de Maxwell, le maître de la science électrique moderne. Toutefois, pour alléger l'écriture et soulager la mémoire, je porterai aux notations du maître les modifications suivantes : Maxwell adopte la notation d'Hamilton (quaternions) pour les produits de vecteurs; j'adopterai la notation plus avantageuse de Grassmann. Maxwell adopte pour chaque vecteur quatre lettres, ses trois composantes, puis le vecteur lui-même, désigné par une lettre gothique; je désignerai le vecteur par la même lettre qui sert à désigner aussi la première de ses trois composantes : c'est ainsi que α désignera la force magnétique, comme la première de ses trois composantes α, β, γ. Il n'en résultera aucune confusion possible. En outre, (α) désignera sa grandeur et (α^2) son carré.

Divers avantages résulteront pour vous de cette étude :

1° Sûreté dans les questions de sens et de signe, si délicates en Mécanique, en Physique et notamment en Électrodynamique.

2° Simplification des écritures et soulagement de la mémoire.

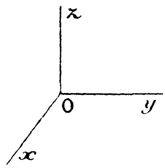
3° Double caractère des transformations, qui seront algébriques par les symboles et géométriques par leur signification. Elles offriront les avantages des deux méthodes, puissance de l'Algèbre, intuition de la Géométrie.

4° Préparation à la lecture de Maxwell, Tait, Peano, et autres auteurs aujourd'hui nombreux, qui ont employé le *calcul géométrique* de Grassmann et Hamilton ou les clefs algébriques de Cauchy.

2. *Trièdre des coordonnées* Oxyz. *Convention des astronomes.* — Avec Maxwell, adoptez cette convention. Les lettres sont disposées de façon qu'un observateur placé suivant Oz (*fig.* 1), la tête vers z, doive faire tourner Ox de $\frac{\pi}{2}$ en sens inverse des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire de droite à gauche, pour l'amener

sur Oy. Ce sens est le *sens direct* des astronomes. C'est le sens adopté en Géométrie plane, en Trigonométrie. C'est le sens contraire à celui des géomètres, qui ont

Fig. 1.

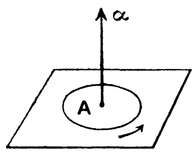


adopté deux conventions contraires, l'une pour la Géométrie plane, l'autre pour l'espace, incohérence qu'il vaut mieux éviter en adoptant, avec Maxwell, la convention des astronomes.

3. *Vecteurs et cycles. Leur correspondance.* — Une translation, une vitesse, une vitesse de rotation présentent ce caractère commun de posséder une grandeur, une direction de droite, un sens. Toute entité présentant ces trois caractères est un *vecteur*. De même qu'un *élément rectiligne* parcouru dans un sens donné conduit à la notion de vecteur, de même une *surface plane* dont le périmètre est parcouru dans un sens donné de rotation conduit à la notion correspondante de *cycle*, doué aussi de grandeur, direction de plan et sens : l'aire de la surface, la direction de son plan et le sens dans lequel son périmètre est parcouru. Le périmètre ainsi doué de sens est le *circuit* du cycle. Le cycle n'est pas seulement doué des trois propriétés, grandeur, direction et sens; il est entièrement caractérisé par elles, comme le vecteur, car on y fait abstraction de la position et de la forme de sa surface. Au cycle A on peut faire correspondre un vecteur α ayant même mesure que l'aire A,

perpendiculaire au plan de A (*fig.* 2), et dans un sens tel que, relativement à α, le circuit de A soit de sens direct. Par ce procédé, nous établissons entre éléments

Fig. 2.



superficiels et vecteurs une correspondance telle qu'à chaque élément superficiel correspond un vecteur, et inversement. Avec Grassmann, désignez par $|$ A le vecteur α *correspondant de* A, et par $|\,\alpha$ le cycle A *correspondant de* α.

De même que les résultats de la théorie des trièdres peuvent être appliqués aux triangles sphériques qui leur correspondent, de même les résultats que vous connaissez sur les vecteurs s'appliquent aux cycles sans qu'il soit nécessaire d'en faire une étude spéciale. C'est ainsi que, pour faire l'addition des cycles, on pourra faire l'addition des vecteurs correspondants et prendre le cycle correspondant du vecteur résultant.

4. *Multiplication des vecteurs et des cycles. Flux.* — Soient deux vecteurs α_1 et α_2 (*fig.* 3). J'appellerai *produit superficiel* de ces deux vecteurs et je désignerai par $\alpha_1\alpha_2$ le cycle qu'on obtient en portant le vecteur $M_1M_2 = \alpha_2$ à la suite de $OM_1 = \alpha_1$, en terminant le parallélogramme ainsi commencé et en prenant le cycle de ce parallélogramme dans le sens OM_1M_2. D'après nos conventions, on a

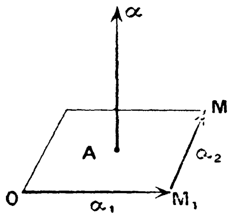
$$\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_2\alpha_1.$$

Le vecteur

(1) $$\alpha = |[\alpha_1 \alpha_2],$$

qui correspond à $\alpha_1 \alpha_2$, est le *produit vectoriel* des deux vecteurs α_1 et α_2. Pour passer rapidement de la formule vectorielle (1) aux formules analytiques, dans le système de Descartes, il faut savoir par cœur les composantes

Fig. 3.



de α en fonction des composantes de α_1 et de α_2; mais vous les savez déjà. En effet, vous avez vu en Mécanique que $\alpha_1 \alpha_2$ correspond à l'idée de couple et $|[\alpha_1 \alpha_2]$ à l'idée de moment. Vous savez donc que les projections du vecteur α sur les trois axes sont

(2) $$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, \\ \beta = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2, \\ \gamma = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2, \end{array}\right.$$

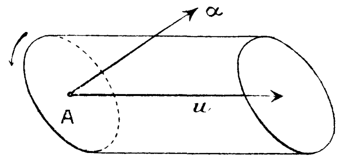
et que ces valeurs représentent aussi bien les valeurs algébriques des projections du cycle $\alpha_1 \alpha_2$ sur les trois plans coordonnés.

Passons au *produit d'un cycle et d'un vecteur*. Il répond à l'idée de *flux*. Quand un fluide possède une vitesse u, le débit du fluide à travers un élément superficiel A est mesuré par le cylindre (A, u), qui a pour base A et pour génératrice u. On fera connaître le sens du débit (A, u) en le précédant d'un signe, le signe +

si le vecteur u est du même côté que le vecteur $\alpha = |A$, le signe — dans le cas contraire. Le volume (A, u) ainsi précédé d'un signe est le flux du vecteur u à travers A. On l'appelle aussi *produit de* A et u et on le désigne indifféremment par Au ou uA. On peut encore le désigner par $u|\alpha$, en écrivant $|\alpha$ au lieu de A.

Le cylindre (A, u) (*fig.* 4) a pour mesure le produit

Fig. 4.



de sa base par sa hauteur; or, la base a même mesure que α, et la hauteur est la projection de u sur α. On peut donc dire que $u|\alpha$ représente le produit des deux longueurs u et α par le cosinus de leur angle, expression que vous avez rencontrée en Mécanique avec la notion de travail. C'est ce que nous appellerons *produit algébrique* des vecteurs u et α. La dernière définition étant symétrique par rapport aux deux vecteurs, on a

$$u|\alpha = \alpha|u.$$

Enfin, on peut considérer l'élément superficiel A comme le produit superficiel de deux vecteurs $A = \alpha_1\alpha_2$. Le produit $Au = \alpha_1\alpha_2 u$ mérite alors le nom de *produit algébrique des trois vecteurs* α_1, α_2 *et* u.

D'après nos définitions, ce produit change de signe quand on intervertit l'ordre de deux des facteurs vectoriels. Il est positif quand les facteurs α_1, α_2, u sont disposés comme les axes Ox, Oy, Oz du trièdre de référence. Il convient de savoir par cœur l'expression du flux en fonction des composantes des vecteurs qui le définissent.

Soient α, β, γ, puis u, v, w les composantes des vecteurs α et u; on sait que le produit de leurs longueurs par le cosinus de leur angle a pour valeur $u\alpha + v\beta + w\gamma$; on a donc

$$(3) \qquad u\,|\,\alpha = u\alpha + v\beta + w\gamma.$$

Si, dans cette formule, je remplace $|\,\alpha$ par $\alpha_1\alpha_2$, on aura l'expression de $u\,\alpha_1\alpha_2$, savoir :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} u\alpha_1\alpha_2 = {} & u(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) \\ & + v(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) + w(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2). \end{aligned} \right.$$

Dans le second membre on reconnait le développement du déterminant

$$u\,\alpha_1\alpha_2 = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

résultat également connu pour représenter le volume du parallélipipède.

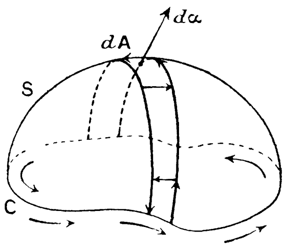
Seulement, la question de signe méritait d'être reprise ici au point de vue de notre définition du flux.

5. *Cycles gauches.* — J'ai considéré seulement des cycles plans; mais la notion s'étend aux figures gauches. Ainsi : prenez une surface quelconque limitée par un circuit gauche C; décomposez-la en éléments superficiels, tels que dA, par un réseau de courbes tracées sur la surface. Chacun d'eux définit un cycle élémentaire dA de sens déterminé par le circuit C. La résultante de tous ces cycles est, *par définition,* le cycle limité par le circuit C. Ce cycle résultant ne dépend d'ailleurs pas de la surface S limitée par le circuit C,

mais il est entièrement déterminé par le circuit seul; pourvu que celui-ci ne change pas, vous pouvez changer arbitrairement la surface S sans changer le cycle résultant (*fig*. 5).

Cette propriété, vous la connaissez déjà. En effet, elle résulte de ce que la notion de cycle contient celle de couple et de la façon que voici : le circuit C repré-

Fig. 5.



sente un ensemble de forces élémentaires représentées chacune par un élément de la courbe C. Ce système de forces peut être remplacé par le système des couples que représentent les circuits élémentaires dA, car, les forces des couples élémentaires se détruisant deux à deux sur les côtés communs, il ne reste que les forces du circuit C.

Par le principe de correspondance, cette propriété est équivalente à cette autre propriété également bien connue et qu'on rencontre en Hydrostatique : *Si la pression est uniforme, la résultante des pressions sur une surface limitée par une courbe* C *est indépendante de la surface et dépend seulement de la courbe,* ou encore : *la résultante des pressions sur la surface totale d'un solide est nulle.*

6. *Règles de calcul relatives à la multiplication des vecteurs.* — Une propriété fondamentale des for-

mules (2), (3), (4) est d'être linéaire par rapport aux trois composantes de chaque vecteur. Il en résulte que la multiplication des vecteurs jouit de la propriété dite *distributive :* c'est cette propriété par laquelle le produit d'une somme par une grandeur s'obtient en multipliant chaque partie de la somme et en ajoutant les produits partiels; ainsi, par exemple,

$$(\alpha + \alpha') \,|\, u = \alpha \,|\, u + \alpha' \,|\, u.$$

Vous pourrez appliquer cette règle fondamentale et toutes celles qui en découlent.

Vous aurez souvent à appliquer une propriété plus particulière, relative au vecteur

$$\Big|\Big[\alpha . \big|[\alpha_1 \alpha_2]\Big],$$

c'est-à-dire $\big|[\alpha \alpha_3]$ en posant

$$\alpha_3 = \big|[\alpha_1 \alpha_2], \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 \\ \beta_3 = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2 \\ \gamma_3 = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \end{array} \right\}.$$

La première des composantes du vecteur considéré est

$$\begin{aligned} \beta\gamma_3 - \gamma\beta_3 &= \beta(\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) - \gamma(\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2) \\ &= \alpha_1(\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2) - \alpha_2(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1). \end{aligned}$$

On en conclut la formule vectorielle

$$(5) \qquad \Big|\Big[\alpha \big|[\alpha_1 \alpha_2]\Big] = \alpha_1 . \alpha \,|\, \alpha_2 - \alpha_2 . \alpha \,|\, \alpha_1.$$

En particulier, si l'on remplace α_1 par α et α_2 par u,

$$(6) \qquad \Big|\Big[\alpha \big|[\alpha u]\Big] = \alpha . \alpha \,|\, u - (\alpha^2) . u \qquad \text{avec} \qquad (\alpha^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

7. *Extension des notations aux symboles différentiels.* — Vous aurez à considérer, par exemple, l'expres-

sion $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$. En généralisant la notation de la formule (3), vous pourrez l'écrire $\left.\frac{d}{dx}\right| u$. De même de toutes les formules où les composantes α, β, γ d'un vecteur sont remplacées par les symboles $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$. C'est ainsi que vous pouvez considérer les vecteurs $\left|\left[\frac{d}{dx}u\right]\right|$, puis $\left|\left[\frac{d}{dx}\middle|\left[\frac{d}{dx}u\right]\right]\right|$ et que, en appliquant à ce dernier la formule (6), vous aurez

$$\left|\left[\frac{d}{dx}\middle|\left[\frac{d}{dx}u\right]\right]\right| = \left.\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\right| u - \left(\frac{d^2}{dx^2}\right)u.$$

Le second membre représente, d'après nos conventions, un vecteur qui a pour composantes

$$\alpha = \frac{d\theta}{dx} - \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)u,$$

$$\beta = \frac{d\theta}{dy} - \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)v, \qquad \theta = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.$$

$$\gamma = \frac{d\theta}{dz} - \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)w,$$

8. *Conclusions.* — Vous avez appris la notion de cycle correspondant à celle de vecteur, puis la multiplication des vecteurs qui renferme les notions de couple, de moment, de travail, de flux. Vous avez un système de conventions d'après Maxwell, de notations d'après Maxwell et Grassmann. Les notations s'étendent aux symboles différentiels $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$.

Cet ensemble constitue un matériel de travail précieux en Physique mathématique.