Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 427-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__427_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

909.

(1869, p. 47.)

Un ellipsoïde de grandeur donnée est tangent aux trois faces d'un angle trièdre trirectangle. Trouver la courbe qui limite la position possible d'un point de contact sur une des faces. (E. LEMOINE.)

SOLUTION

Par M. H. LAURENT.

Je développe l'énoncé ainsi qu'il suit :

Un ellipsoïde d'axes donnés $2a$, $2b$, $2c$ est placé dans un trièdre trirectangle; il peut alors occuper une infinité de positions. On demande de déterminer, sur les faces du trièdre, les points de contact possibles de l'ellipsoïde, ou, plus exactement, le contour à l'intérieur duquel l'ellipsoïde peut toucher chaque face.

Soient

α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe $2a$ relatifs aux arêtes du trièdre pris pour axes de coordonnées;
α', β', γ' ceux de l'axe $2b$;
α'', β'', γ'' ceux de l'axe $2c$,

$$a > b > c.$$

Soient x, y, z les coordonnées du centre de l'ellipsoïde; les conditions de contact seront

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a^2\alpha^2 + b^2\alpha'^2 + c^2\alpha''^2 = x^2, \\ a^2\beta^2 + b^2\beta'^2 + c^2\beta''^2 = y^2, \\ a^2\gamma^2 + b^2\gamma'^2 + c^2\gamma''^2 = z^2, \end{array} \right.$$

en sorte que, en ajoutant,

$$(2) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

équation du lieu du centre.

Mais cette équation n'est l'équation du lieu du centre qu'au point de vue *analytique; en réalité,* le centre de l'ellipsoïde *solide, réel,* ne pourrait pas occuper *effectivement* tous les points de la surface de la sphère (2), et en particulier, si $a = b = c$, il est évident que le centre de l'ellipsoïde occupera une et une seule position bien déterminée.

Commençons par chercher la portion de la sphère (2) sur laquelle peut demeurer le centre de l'ellipsoïde. A cet effet, considérons la première des formules (1). Les α^2 doivent être compris entre o et 1. On doit avoir

$$\begin{array}{l} a^2\alpha^2 + b^2\alpha'^2 + c^2\alpha''^2 = x^2, \\ \alpha^2 + \quad \alpha'^2 + \quad \alpha''^2 = 1, \end{array}$$

ce qui impose un maximum à x^2, autre que $a^2+b^2+c^2$, que l'on déduit de (2); ce maximum s'obtient en posant

$$\begin{aligned} a^2\alpha\, d\alpha + b^2\alpha'\, d\alpha' + c^2\alpha''\, d\alpha'' &= 0,\\ \alpha\, d\alpha + \alpha'\, d\alpha' + \alpha''\, d\alpha'' &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par la méthode du multiplicateur,

$$(a^2+\lambda)\alpha = 0, \qquad (b^2+\lambda)\alpha' = 0, \qquad (c^2+\lambda)\alpha'' = 0,$$

et, comme α, α', α'' ne peuvent être tous trois nuls, λ doit être égal à $-a^2$, à $-b^2$ ou à $-c^2$; cela montre que x^2 doit être compris entre a^2 et c^2; et comme x est (si l'on veut) positif, on voit que x et, pour la même raison, y et z doivent rester compris entre a et c.

Le centre de l'ellipsoïde devra donc rester à l'intérieur d'un hexagone sphérique tracé sur la sphère (2) et dont les côtés auront pour équations, (2) d'abord et

$$\begin{aligned} x &= a, & x &= c,\\ y &= a, & y &= c,\\ z &= a, & z &= c. \end{aligned}$$

A chaque point de l'intérieur de cet hexagone correspondra un point de contact sur chaque face du trièdre; au périmètre de l'hexagone correspondra sur chaque face du trièdre une ligne limitative du point de contact de l'ellipsoïde; on peut se borner à chercher celle de ces trois lignes située sur le plan des xy. C'est ce que je vais faire.

Soient ξ'', η'', o les coordonnées du point de contact de l'ellipsoïde, quand x, y, z sont les coordonnées du centre. Si nous supposons l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes, son équation sera

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1.$$

Si l'on suppose que

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = p \qquad (\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1)$$

soit un plan tangent, le point de contact aura pour coordonnées

$$\frac{a^2\lambda}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2}}, \quad \frac{b^2\mu}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2}}, \quad \frac{c^2\nu}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2}},$$

ce qui exprime que les distances du point de contact aux plans principaux sont égales aux rapports des carrés des demi-axes correspondants, à la distance du centre au plan tangent, multipliés respectivement par les cosinus des angles que la normale fait avec ces demi-axes.

Appliquant ce théorème au point ξ'', η'', o, on aura, en observant que les équations des plans principaux sont

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les relations

$$\begin{aligned}
\alpha(\xi'' - x) + \beta(\eta'' - y) - \gamma z &= \pm \frac{a^2\gamma}{z},\\
\alpha'(\xi'' - x) + \beta'(\eta'' - y) - \gamma' z &= \pm \frac{b^2\gamma'}{z},\\
\alpha''(\xi'' - x) + \beta''(\eta'' - y) - \gamma'' z &= \pm \frac{c^2\gamma''}{z}.
\end{aligned}$$

Pour déterminer le signe à adopter, on multiplie par γ, γ', γ'' et l'on ajoute; on a

$$-z^2 = \pm(a^2\gamma^2 + b^2\gamma'^2 + c^2\gamma''^2)$$

qui, devant être d'accord avec la troisième équation (1), exige que l'on prenne le signe $-$; donc

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\alpha(x - \xi'') + \beta(y - \eta'') + \gamma z &= \frac{c^2\gamma}{z},\\
\alpha'(x - \xi'') + \beta'(y - \eta'') + \gamma' z &= \frac{b^2\gamma'}{z},\\
\alpha''(x - \xi'') + \beta''(y - \eta'') + \gamma'' z &= \frac{c^2\gamma''}{z}.
\end{aligned}\right.$$

Les neuf cosinus α, ..., γ'' se réduisant à trois quantités distinctes, en les éliminant entre (1) et (3), qui forment seulement cinq équations distinctes, il restera deux équations entre x, y, z, ξ'', η'' qui permettront de trouver l'aire décrite par ξ'', η'', quand x, y, z décrira l'hexagone dont nous avons parlé.

Cela posé, en appelant ξ', o, ζ' les coordonnées du point de contact de l'ellipsoïde sur le plan des xz et o, η, ζ les coordonnées du point analogue sur le plan des yz, on aura le groupe de neuf équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)+\alpha x=\frac{a^2\alpha}{x},\\
&\beta'(y-\eta)+\gamma'(z-\zeta)+\alpha' x=\frac{b^2\alpha'}{x},\\
&\beta''(y-\eta)+\gamma''(z-\zeta)+\alpha'' x=\frac{c^2\alpha''}{x},\\
&\gamma(z-\zeta')+\alpha(x-\xi')+\beta y=\frac{a^2\beta}{y},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\alpha(x-\xi'')+\beta(y-\eta'')+\gamma z=\frac{a^2\gamma}{z},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

entre lesquelles on peut éliminer les neuf cosinus, ce qui donne les relations

$$(5)\quad \begin{vmatrix} x-\dfrac{a^2}{x} & y-\eta & z-\zeta \\ x-\xi & y-\dfrac{a^2}{y} & z-\zeta' \\ x-\xi'' & y-\eta'' & z-\dfrac{a^2}{z} \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-\dfrac{b^2}{x} & y-\eta & z-\zeta \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-\dfrac{c^2}{x} & y-\eta & z-\zeta \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}=0.$$

On obtient d'autres relations en multipliant les trois premières équations (4) par β, β', β'' ou γ, γ', γ'' et en ajoutant, ce qui donne

$$x(y-\eta)=a^2\alpha\beta+b^2\alpha'\beta'+c^2\alpha''\beta'',$$
$$x(z-\zeta)=a^2\alpha\gamma+b^2\alpha'\gamma'+c^2\alpha''\gamma'';$$

si l'on fait des permutations tournantes, on élimine encore les neuf cosinus, et l'on a les relations remarquables

$$x(y-\eta)=y(x-\xi'),$$
$$x(z-\zeta)=z(x-\xi''),$$

ou, plus simplement,

$$\begin{aligned} x\eta &= y\xi', & x\zeta &= z\xi'', \\ y\zeta' &= z\eta'', & y\xi' &= x\eta, \\ z\xi'' &= x\zeta, & z\eta'' &= y\zeta', \end{aligned}$$

équations qui se réduisent à celles de la première colonne

$$(6) \qquad x\eta = y\xi', \qquad y\zeta' = z\eta'', \qquad z\xi'' = x\zeta.$$

Les relations (5), (6), quand x, y, z seront donnés, permettront de calculer les six quantités ξ, η, η', ζ', ζ'', ξ''.

On peut faire usage de (6) pour éliminer η'' et ξ'' et, par exemple, ξ'; les formules (5) deviennent alors

$$\begin{vmatrix} x - \dfrac{a^2}{x} & y - \eta & z - \zeta \\ x - \dfrac{x\eta}{y} & y - \dfrac{a^2}{y} & z - \zeta' \\ x - \dfrac{x\zeta}{z} & y - \dfrac{y\zeta'}{z} & z - \dfrac{a^2}{z} \end{vmatrix} = 0.$$

. . . .

Ces trois équations sont du second degré en ζ'; en éliminant ζ', on a deux relations entre x, y, z, η et ζ. En y supposant, par exemple, $x = a$, on aura l'une des équations du contour limitateur.

Je crois qu'il serait dommage de pousser les calculs plus loin; ce serait détruire la belle symétrie de nos formules. Il suffit, je crois, d'avoir montré qu'il est possible, par des calculs simples, faciles à effectuer, d'exprimer les coordonnées des contours limitateurs en fonction d'un paramètre.

Il ne sera peut-être pas inutile de faire observer que de (6) on tire

$$\eta\zeta'\xi'' = \zeta\xi'\eta'' \qquad \text{ou} \qquad \frac{\eta}{\zeta}\,\frac{\zeta'}{\xi'}\,\frac{\xi''}{\eta''} = 1,$$

ce qui exprime une propriété des tangentes des angles que les rayons vecteurs des points de contact font avec les axes. Cela exprime aussi qu'en considérant les plans, qui passent par les symétriques des points de contact par rapport aux axes, passent aussi par l'origine, etc.