Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 40-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__40_0>

BIBLIOGRAPHIE.

La fonction Gamma : Théorie, Histoire, Bibliographie; par *Maurice Godefroy*. — VII-94 pages, in-8°. (Paris, Gauthier-Villars, 1901.)

La transcendante ainsi désignée est de ces fonctions dont l'étude n'a cessé de solliciter vivement l'attention et la curiosité des mathématiciens depuis sa découverte par Euler, qui la rencontra dans l'examen d'un problème d'interpolation qui avait déjà occupé Wallis, Goldbach et Daniel Bernoulli.

Aujourd'hui, le domaine de cette fonction est marqué d'empreintes dues à la plupart des mathématiciens qui ont perfectionné l'Analyse. La liste serait longue de tous ceux qui ont laissé des résultats plus ou moins intéressants dans l'étude de la fonction gamma; on en jugera d'après la bibliographie dressée par M. Brunel, mais dans les quinze années qui ont suivi la publication de ce Travail, il semble que l'intérêt des chercheurs n'ait pas faibli, grâce aux puissantes ressources que les récents progrès de la Théorie des fonctions venaient mettre entre leurs mains, en leur donnant le moyen de jeter de nouvelles clartés dans toutes les questions que soulève cette investigation.

Les Traités classiques de Calcul intégral ne donnent de la fonction gamma qu'une idée très incomplète, qui ne fait pas pressentir son rôle étendu dans l'Analyse mathématique. La présente monographie comblera aisément cette lacune, en épargnant au lecteur la recherche de résultats disséminés dans une foule de recueils mathématiques pour la plupart inaccessibles.

Le Mémoire est divisé en sept Sections, dont la première est consacrée à un Aperçu historique où sont exposées seulement les découvertes fondamentales et les orientations successives de la théorie de la fonction gamma.

Avec la Section II commence l'étude spéciale de ses propriétés. Disons tout de suite que l'auteur s'est appliqué à en donner les démonstrations les plus simples, et qu'à cet effet il n'a déterminé son choix qu'après discussion comparative des méthodes successivement proposées par différents analystes.

L'étude de la fonction Γ est ici exposée en prenant pour base les propriétés de la fonction

$$\Pi(x) = n^x \frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

et de son inverse, dont Weierstrass a démontré l'importance. On est ainsi conduit à étudier également l'inverse de la fonction Γ, ou ce que Weierstrass a appelé la factorielle de x, $\mathrm{F}c(x)$, puis à établir la relation fonctionnelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

et à évaluer les résidus de $\Gamma(x)$.

Incidemment se présentent quelques applications, entre autres la détermination du module de $\Gamma(\alpha + \beta i)$, l'étude d'une certaine série de Stirling, et la convergence de la série hypergéométrique.

Plusieurs de ces résultats constituaient les propriétés fondamentales connues dès les premiers temps. Dans la suite, de Gasparis et Prym ont découvert et pénétré une décomposition nouvelle de la fonction Γ en deux autres fonctions P et Q, qui satisfont aux équations fonctionnelles

$$\mathrm{P}(x+1) = x\mathrm{P}(x) - \frac{1}{e}, \qquad \mathrm{Q}(x+1) = x\mathrm{Q}(x) + \frac{1}{e},$$

et aussi à la relation

$$\Gamma(x) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x),$$

qui met la fonction gamma sous forme de somme de deux fonctions dont l'étude plus approfondie a montré que $\mathrm{P}(1+x)$ est développable suivant une série entière de rayon de convergence égal à l'unité, tandis que $\mathrm{Q}(x)$ est une fonction transcendante entière.

Cependant il s'en faut que cette investigation ait porté tous ses fruits, nonobstant les résultats obtenus déjà par Bourguet. Tout ce que l'on peut dire, c'est que l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ admet au moins une racine dans chacun des intervalles $(-\frac{11}{2}, -5)$. $(-6, -\frac{11}{2})$. $(-\frac{15}{2}, -7)$ $(-8. -\frac{15}{2})$, etc., tandis qu'elle n'en a point dans les autres intervalles; que cette équation $P(x) = 0$ ne paraît pas pouvoir admettre plus de quatre racines imaginaires, et qu'on ne peut encore affirmer si l'équation $Q(x) = 0$ possède des racines, à part une remarque de Lindhagen.

Les propriétés de la fonction gamma étudiées ou exposées dans la Section III sont, en résumé, la relation des compléments, indiquée par Euler

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

la formule de Legendre

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\Gamma(2x),$$

la formule de Gauss

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)$$
$$= (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-mx+\frac{1}{2}}\Gamma(mx),$$

la formule de Mellin

$$\frac{\Gamma^m(z)}{\Gamma(z-\alpha_1 x)\Gamma(z-\alpha_2 x)\ldots\Gamma(z-\alpha_m x)} = \prod_{n=0}^{n=\infty}\left[1-\left(\frac{x}{n+z}\right)^m\right],$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant les m racines de l'équation binome

$$\alpha^m - 1 = 0.$$

Enfin, la théorie de la fonction gamma peut se déduire de celle de la série hypergéométrique de Gauss et inversement, comme l'a montré Thomae, la théorie de la série hypergéométrique peut être exposée en prenant pour point de départ les premières propriétés de $\Gamma(x)$.

La fonction de Binet fait l'objet de la Section IV, en raison de l'importance de cette transcendante et des nombreux travaux qu'elle a provoqués.

A signaler, chemin faisant, diverses formules dues à Binet, à Gudermann et à Stirling, avec applications à certaines questions.

La Section V traite des fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ définies par les notations

$$\Phi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}, \qquad \Psi(x) = \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}.$$

Ces fonctions peuvent servir à retrouver toutes les propriétés de $\Gamma(x)$ et inversement.

Notons, en passant, que $\Phi(x)$ et $\Gamma(x)$ ne peuvent être solutions d'aucune équation différentielle.

Dans la Section VI, l'auteur expose les développements en séries entières des fonctions $\log \Gamma(1+x)$, $\Gamma(1+x)$, $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$, $P(1+x)$, $Q(1+x)$, $\Phi(1+x)$ et $\Psi(1+x)$.

Les applications qui forment la VII^e et dernière Section se rapportent à des sujets indiqués par M. Appell et qui rentrent sous les désignations suivantes :

Limites de produits infinis convergents et sommation des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice.

Résolution de certaines équations fonctionnelles

$$F(x+1) = R(x)\,F(x),$$
$$F(x+1) = F(x) + R_1(x),$$

$R(x)$, $R_1(x)$ désignant des fonctions rationnelles données.

Incidemment, on est amené à traiter l'équation fonctionnelle

$$F(x+1) = x\,F(x) + R(x),$$

$R(x)$ désignant alors un polynome entier en x.

Cette équation, étudiée par Lindhagen, a été résolue complètement par Jensen.

Enfin, la même théorie conduit à la solution générale des équations suivantes dites *équations de Crelle :*

$$\begin{aligned} F(x, y, z+a) &= F(x, y, z)\,F(x+zy, y, a), \\ F(ax, ay, z) &= a^2\,F(x, y, z), \\ F(x, y, 1) &= x. \end{aligned}$$

Ce problème n'a d'ailleurs été résolu d'une façon décisive que par Weierstrass.

En résumé, la monographie que nous devons à M. Godefroy nous semble avoir pleinement réalisé le terme auquel a été amenée de nos jours l'étude de la fonction gamma. L'auteur se sera acquis des droits à la reconnaissance des mathématiciens en leur donnant de grandes facilités pour une étude si attrayante et qui laisse encore le champ libre à de nouvelles découvertes.

H. B.