NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

NIELS NIELSEN

Équations différentielles linéaires obtenues pour le produit de deux fonctions cylindriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 396-410

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__396_0>

[D6e; H5iα]

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES OBTENUES POUR LE PRODUIT DE DEUX FONCTIONS CYLINDRIQUES;

PAR M. NIELS NIELSEN, à Copenhague.

Les Traités de M. C. Neumann [1] et de feu M. E. Lommel [2] marquent le point tournant de l'histoire des fonctions cylindriques (souvent dites *besséliennes*) en donnant, pour la première fois, un aperçu systématique de la théorie de telles fonctions. C'est pourquoi un Mémoire sur cette matière, publié avant les deux petits livres susdits, présente un intérêt spécial pour celui qui étudie profondément les fonctions cylindriques.

En particulier, le Mémoire que feu M. Ernst Meissel [3] a publié en 1862 dans le *programme de l'École professionnelle* à Iserlohn présente un tel intérêt à cause des résultats essentiels qu'il contient. En effet, abstraction faite d'un grand nombre d'intégrales définies nouvelles et très intéressantes, ce Mémoire introduit, pour la première fois, la fonction cylindrique de deuxième espèce et de paramètre zéro, savoir la fonction $Y^0(x)$. En outre on y trouvera une équation différentielle linéaire et de troisième ordre pour laquelle les trois fonctions

$$[J^0(x)]^2, \quad J^0(x)\,Y^0(x), \quad [Y^0(x)]^2$$

(1) *Theorie der Bessel'schen Functionen*. Leipzig, 1867.

(2) *Studien über die Bessel'schen Functionen*. Leipzig, 1868.

(3) Ce géomètre, calculateur éminent (élève de Jacobi, du reste), a élaboré, on le sait, des Tables numériques diverses sur les fonctions cylindriques, et qui sont les plus complètes que l'on possède aujourd'hui.

constituent un système fondamental des intégrales. D'après ce que je sais, Meissel est le seul auteur qui ait remarqué une telle propriété des fonctions cylindriques; cependant, son Mémoire intéressant est resté inaperçu, comme le montre une autre publication ([1]) du même auteur.

Les recherches présentes sont destinées à généraliser l'équation différentielle de Meissel en démontrant que le produit de deux fonctions cylindriques de même argument, mais de paramètres quelconques, satisfait toujours à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre. Dans le cas particulier où les deux paramètres sont égaux, ou de même signe, ou de signe contraire, l'ordre de l'équation susdite peut être abaissé d'une unité.

Ces résultats sont produits en obtenant, à l'aide des formules fondamentales des fonctions cylindriques, certains cas particuliers des équations différentielles en question. La forme de ces équations ainsi trouvée, le cas le plus général peut être traité facilement.

Il est digne de remarquer ici que nos équations différentielles nous donnent une propriété nouvelle et intéressante des séries *neumanniennes* et *kapteyniennes* de deuxième espèce analogue à celle qu'on connaît pour les mêmes séries de première espèce.

I. — Sur quelques formules fondamentales contenant les fonctions cylindriques.

Avant de commencer nos recherches particulières il nous semble utile de dire quelques mots sur ce que nous entendons par une *fonction cylindrique géné-*

([1]) *Jahresbericht über die Ober-Realschule in Kiel*. 1890, p. 1, 2.

rale, $C^{\mu}(x)$, *de l'argument x et du paramètre* μ; une telle fonction représente la solution la plus générale des deux équations fonctionnelles

$$(1) \qquad C^{\mu-1}(x) - C^{\mu+1}(x) = 2 D_x C^{\mu}(x),$$

$$(1_a) \qquad C^{\mu-1}(x) + C^{\mu+1}(x) = \frac{2\mu}{x} C^{\mu}(x),$$

et peut être représentée sous la forme

$$(1_b) \qquad C^{\mu}(x) = a(\mu) J^{\mu}(x) + b(\mu) Y^{\mu}(x),$$

où $a(\mu)$, $b(\mu)$ sont deux fonctions de μ assujetties à la condition d'être inaltérées si nous posons $\mu + 1$ au lieu de μ, mais sont au reste complètement arbitraires. $J^{\mu}(x)$ et $Y^{\mu}(x)$ désignent les fonctions cylindriques de première et de deuxième espèce, savoir

$$J^{\mu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s}}{s!\,\Gamma(\mu+s+1)},$$

$$Y^{\mu}(x) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} [\cos \mu\pi \, J^{\mu}(x) - J^{-\mu}(x)];$$

dans le cas particulier où μ est entier, l'expression de $Y^{\mu}(x)$ se présente sous forme indéterminée, c'est-à-dire qu'il faut prendre la vraie valeur de cette expression.

Les formules (1), (1_a) montrent que la fonction générale $C^{\mu}(x)$ doit satisfaire à l'équation bessélienne de paramètre μ, savoir

$$(2) \qquad y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Remarquons encore que la règle de Cauchy, pour la multiplication de deux séries infinies, donnera immédiatement la formule

$$(3)\quad J^{\mu}(x)\,J^{\nu}(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\binom{\mu+\nu+2s}{s}}{\Gamma(\mu+s+1)\,\Gamma(\nu+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2s},$$

d'où, à l'aide de l'intégrale bien connue

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n\cos(\mu\varphi)\,d\varphi\\ &\qquad=\frac{n!}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}+1\right)},\end{aligned}\right.$$

où n désigne un entier non négatif, nous déduirons cette autre formule

$$(5)\quad J^{\frac{n+\mu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\mu}{2}}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}J^n(2x\cos\varphi)\cos(\mu\varphi)\,d\varphi,$$

qui est essentielle dans les recherches qui nous occupent ici. Supposons dans (5) n pair et $\mu=0$; nous retrouvons une formule due à M. C. Neumann ([1]), tandis que les formules obtenues en supposant $\frac{n+\mu}{2}$ et $\frac{n-\mu}{2}$ égaux à deux nombres entiers appartiennent à Schläfli ([2]). En remarquant maintenant que la fonction $J^n(2x\cos\varphi)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\left(4\cos^2\varphi-\frac{n^2}{x^2}\right)z=0,$$

nous aurons, en vertu de (5), pour la fonction

$$J^{\frac{n+\mu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\mu}{2}}(x)$$

([1]) *Theorie der Bessel'schen Functionen*, p. 70. Leipzig, 1867.

([2]) *Mathematische Annalen*, t. III, 1871, p. 139.

cette autre équation

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} & y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{n^2}{x^2}y \\ & \quad = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{J}^n(2x\cos\varphi)(2\cos\varphi)^2\cos(\mu\varphi)\,d\varphi. \end{aligned}\right.$$

Or, le second membre de (α) peut être mis, à l'aide de (4), sous la forme

$$-4\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^n \binom{n+2s}{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{n+\mu}{2}\right)\Gamma\left(s+1+\frac{n-\mu}{2}\right)} \frac{(n+2s+2)(n+2s+1)}{(n+2s+2)^2-\mu^2}.$$

Appliquons ensuite à cette expression l'identité

$$\frac{a(a-1)}{a^2-\mu^2} = 1 + \frac{\mu-1}{2}\frac{1}{a-\mu} - \frac{\mu+1}{2}\frac{1}{a+\mu},$$

l'équation (α) peut s'écrire sous cette forme nouvelle

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} & y'' + \frac{1}{x}y' + \left(4 - \frac{n^2}{x^2}\right)y \\ & \quad = 2(\mu+1)\,u^{-\mu}(x) - 2(\mu-1)\,u^{\mu}(x), \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$u^{\mu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{n+2s}{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{n+\mu}{2}\right)\Gamma\left(s+1+\frac{n-\mu}{2}\right)} \frac{1}{n+2s+2-\mu},$$

de façon que nous aurons immédiatement

$$(\gamma)\quad \mathrm{D}_x\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\mu} u^{\mu}(x)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{1-\mu} \mathrm{J}^{\frac{n+\mu}{2}}(x)\,\mathrm{J}^{\frac{n-\mu}{2}}(x).$$

Cela posé, multiplions par $\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\mu}$ les deux membres de (β) et différentions par rapport à x, nous obtiendrons, en vertu de (γ),

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned} & y''' + \frac{3-\mu}{x} y'' + \left(4 + \frac{1-n^2-\mu^2}{x^2}\right) y' \\ & \qquad\qquad + \left(\frac{4-4\mu}{x} + \frac{n^2\mu}{x^3}\right) y \\ & = -\frac{4}{x}\mu(\mu+1)\,u^{-\mu}(x), \end{aligned}\right.$$

ce qui donnera, dans le cas particulier $\mu = 0$, pour la fonction $\left[J^{\frac{n}{2}}(x)\right]^2$, cette équation différentielle de troisième ordre

$$(6)\qquad y''' + \frac{3}{x} y'' + \left(4 + \frac{1-n^2}{x^2}\right) y' + \frac{4}{x} y = 0.$$

Posons encore dans cette formule $n = 0$; nous retrouvons l'équation trouvée par Meissel.

Dans le cas général, la formule déduite de (β) en y posant $-\mu$ au lieu de μ donnera aisément, en vertu de (δ), cette équation du quatrième ordre pour la fonction $J^{\frac{n+\mu}{2}}(x) J^{\frac{n-\mu}{2}}(x)$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & y^{\text{IV}} + \frac{6}{x} y''' + \left(4 + \frac{7-n^2-\mu^2}{x^2}\right) y'' \\ & \quad + \left(\frac{16}{x} + \frac{1-n^2-\mu^2}{x^3}\right) y' + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{n^2\mu^2}{x^4}\right) y = 0, \end{aligned}\right.$$

et c'est là le résultat particulier que nous nous proposions de démontrer.

II. — Équations différentielles obtenues pour le produit de deux fonctions cylindriques quelconques.

L'équation différentielle (7) que nous venons d'obtenir nous conduira naturellement à chercher, pour la fonction $J^{\mu}(x)\,J^{\nu}(x)$, une équation de cette forme

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} & y^{\text{IV}} + \frac{6}{x}y''' + \left(4 + \frac{a}{x^2}\right)y'' \\ & + \left(\frac{16}{x} + \frac{b}{x^3}\right)y' + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{c}{x^4}\right)y = 0, \end{aligned}\right.$$

dont les coefficients a, b, c doivent être indépendants de x. Pour déterminer ces coefficients inconnus, portons dans (α) la série (3) obtenue pour y et cherchons le coefficient de la puissance $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2s-y}$; nous obtiendrons, par un calcul simple,

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} & \omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega+3) + a\omega(\omega-1) + b\omega + c \\ & \quad \equiv [\omega^2 - (\mu+\nu)^2][\omega^2 - (\mu-\nu)^2], \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger, $\omega = \mu + \nu + 2s$. Or, l'équation (β) doit être satisfaite par une infinité de valeurs de ω; c'est-à-dire qu'elle doit se réduire à une identité formelle, ce qui nous permettra de déterminer d'une seule façon les coefficients susdits, et nous obtiendrons par là l'équation cherchée, savoir :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & y^{\text{IV}} + \frac{6}{x}y''' + \left(4 + \frac{7 - 2\mu^2 - 2\nu^2}{x^2}\right)y'' \\ & \qquad + \left(\frac{16}{x} + \frac{1 - 2\mu^2 - 2\nu^2}{x^3}\right)y' \\ & \qquad\qquad + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{(\mu^2-\nu^2)}{x^4}\right)y = 0; \end{aligned}\right.$$

car la forme même de (β) montre que le coefficient obtenu pour la puissance $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu-4}$ dans le premier membre de (8) doit s'évanouir de sorte que (8) deviendra homogène.

On verra que notre équation (8) ne contient que des carrés de μ et de ν, de façon que les signes de ces deux paramètres peuvent être choisis d'une manière complètement arbitraire, c'est-à-dire que le produit de deux fonctions cylindriques quelconques de l'argument x et des paramètres μ et ν doit satisfaire à cette équation (8). De même, l'intégrale complète de notre équation susdite peut être représentée généralement sous cette forme

$$(9)\quad \begin{cases} y = \mathrm{A}\, \mathrm{J}^{\mu}(x)\, \mathrm{J}^{\nu}(x) + \mathrm{B}\, \mathrm{J}^{\mu}(x)\, \mathrm{Y}^{\nu}(x) \\ \qquad + \mathrm{C}\, \mathrm{Y}^{\mu}(x)\, \mathrm{J}^{\nu}(x) + \mathrm{D}\, \mathrm{Y}^{\mu}(x)\, \mathrm{Y}^{\nu}(x), \end{cases}$$

où A, B, C, D désignent quatre fonctions arbitraires de μ et de ν.

Cela posé, nous venons de démontrer cette proposition remarquable et inconnue d'après ce que je sais :

Désignons par B_{μ}, B_{ν} *deux intégrales quelconques des équations besséliennes des paramètres* μ *et* ν; *le produit* $\mathrm{B}_{\mu}\mathrm{B}_{\nu}$ *satisfait à l'équation différentielle* (8). *Le produit des intégrales complètes des deux équations besséliennes donnera généralement l'intégrale complète de* (8).

La définition même de la fonction cylindrique de deuxième espèce Y montre que, dans le cas $\nu = \pm \mu$, les quatre intégrales que nous venons d'obtenir ne constituent pas un système fondamental, car elles ne représentent que trois fonctions indépendantes. Pour trouver, dans ce cas, une quatrième intégrale particulière, on peut appliquer une méthode entièrement analogue à celle qui nous a donné la fonction $\mathrm{Y}^{\mu}(x)$, μ entier. En effet, il est évident que la fonction

$$\frac{\pi}{\sin\pi(\mu \mp \nu)} \left[\cos\pi(\mu \mp \nu)\, \mathrm{J}^{\pm\mu}(x)\, \mathrm{Y}^{\nu}(x) - \mathrm{J}^{\nu}(x)\, \mathrm{Y}^{\pm\mu}(x)\right]$$

est toujours une intégrale de (8), de sorte que nous n'avons que, dans nos cas particuliers, à chercher la vraie valeur de cette expression indéterminée pour $\mu = \pm \nu$. Pourvu que μ soit égal à un entier, l'intégrale nouvelle ainsi obtenue peut être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions cylindriques et des fonctions élémentaires, comme je l'ai démontré récemment [1].

Il est évident que, si un seul des produits figurant dans le second membre de (9) est solution d'une équation de la forme (8), il en sera de même pour les trois autres : c'est-à-dire qu'il sera inutile de chercher généralement une équation de la même forme, mais d'un ordre inférieur, à laquelle un tel produit doive satisfaire. Or, dans le cas particulier $\mu = \pm \nu$, les produits susdits ne donnent que trois fonctions indépendantes, de sorte que l'équation particulière (6) nous suggère naturellement l'idée de chercher une équation différentielle de cette forme

$$(\gamma) \qquad y''' + \frac{a}{x} y'' + \left(\alpha + \frac{b}{x^2}\right) y' + \left(\frac{\beta}{x} + \frac{c}{x^3}\right) y = 0,$$

auxquelles ces trois produits doivent satisfaire. Portons maintenant dans (γ) les séries obtenues pour $J^{\mu}(x)\, J^{\pm\mu}(x)$; nous aurons à déterminer les coefficients inconnus à l'aide de l'identité

$$(\delta) \quad \begin{cases} (\omega - 1)[\omega(\omega - 1)(\omega - 2) + a\omega(\omega - 1) + b\omega + c] \\ \quad \equiv \omega(\omega^2 - 4\mu^2)[\alpha(\omega - 2) + \beta], \end{cases}$$

où l'on a posé respectivement $\omega = \mu + \nu + 2s$, $\omega = 2s$. Cela posé, nous verrons que nos deux fonctions doivent satisfaire à cette équation linéaire du troisième ordre

$$(10) \qquad y''' + \frac{3}{x} y'' + \left(4 + \frac{1 - 4\mu^2}{x^2}\right) y' + \frac{4}{x} y = 0,$$

---

[1] *Annali di Matematica*, 3e série, t. V, 1901, p. 367.

généralisation de (2) qui a pour intégrale complète

$$(11)\qquad y = \mathrm{A}\,[\mathrm{J}^{\mu}(x)]^2 + \mathrm{B}\,\mathrm{J}^{\mu}(x)\,\mathrm{Y}^{\mu}(x) + \mathrm{C}\,[\mathrm{Y}^{\mu}(x)]^2,$$

où A, B, C désignent trois fonctions arbitraires de μ.

Cherchons maintenant les déterminants fonctionnels Δ_4, Δ_3 de nos systèmes fondamentaux (9), (11); calculons d'abord Δ_4. La méthode générale donnera

$$\Delta_4 = \mathrm{C}x^{-6},$$

C désignant une quantité indépendante de x; pour déterminer cette constante il suffit de regarder le déterminant déduit de Δ_4 en y remplaçant chacune des fonctions transcendantes qui y figurent par le premier terme des séries infinies correspondantes. Supprimant encore le facteur commun x^{-6} et posant $x = 0$, on obtiendra

$$(12)\qquad \Delta_4 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{2}{x}\right)^6,$$

résultat qui s'accorde bien avec les remarques faites sur les quatre intégrales (9). Le même procédé donnera encore

$$(13)\qquad \Delta_3 = \left(\frac{2}{x}\right)^3.$$

Remarquons qu'un calcul direct montrera que les formules (12), (13) ne sont autre chose que des conséquences immédiates de cette équation fondamentale due à Lommel ([1])

$$(\varepsilon)\qquad \mathrm{J}^{\mu}(x)\,\mathrm{Y}^{\mu-1}(x) - \mathrm{J}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Y}^{\mu}(x) = \frac{x}{2}$$

et de celle obtenue en posant ν au lieu de μ. Cela posé,

([1]) *Mathematische Annalen*, t. IV, 1871, p. 108.

il est évident que les équations différentielles linéaires dont les intégrales complètes sont les fonctions (9), (11) peuvent être déduites aussi, à l'aide de (α), par les méthodes générales classiques dans la théorie des équations différentielles linéaires [1]. Ces remarques faites, on comprend le droit de l'assertion suivante :

Les produits de n fonctions cylindriques quelconques de l'argument x et des paramètres quelconques satisfait à une équation différentielle linéaire de l'ordre 2^n généralement dont les coefficients sont des polynomes entiers de x du degré 2^n au plus.

En outre, il est évident que les intégrales des équations différentielles plus générales de la classe *fuchsienne* possèdent une propriété analogue. Néanmoins, je me suis borné à regarder ici seulement les produits de deux intégrales des équations *besséliennes*, c'est-à-dire les produits de deux fonctions cylindriques, parce que de tels produits jouent, comme fonctions de développement, un rôle aussi fondamental que les fonctions cylindriques elles-mêmes. En effet, à chacun des développements d'une fonction selon les fonctions cylindriques trouvés par MM. Fourier, Schlömilch, Neumann et Kapteyn correspond un développement analogue de la même fonction selon les produits susdits.

La démonstration rigoureuse de cette assertion peut être effectuée; je le démontrerai bientôt dans un autre travail, en généralisant et en rendant tranchante la méthode particulière que j'ai appliquée récemment dans mes recherches sur les séries *neumanniennes* et *kapteyniennes*, c'est-à-dire en appliquant cette identité

---

(1) *Voir*, par exemple : L. HEFFTER, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen*, p. 50, 145. Leipzig, 1894.

générale

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi\sin 2\psi)\cos(\mu\varphi)\sin 2\psi(\tang\psi)^{\mu}\,d\varphi\,d\psi = f(x) - f(0),$$

dont le cas particulier : $f(x)$ holomorphe aux environs de zéro, se présente dans mes recherches susdites ([1]).

III. — Théorème sur les séries fondamentales neumanniennes et kapteyniennes de deuxième espèce.

Regardons ici les séries *neumanniennes* valables pourvu que $(y) > (x)$:

$$(\alpha)\quad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon^{n}\,O^{\mu,n}(y)\,J^{\mu+n}(x),$$

$$(\beta)\quad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n\,U^{\mu,\nu,n}(y)\,J^{\mu+n}(x)\,J^{\nu+n}(x),$$

où $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, $n > 0$ et où l'on a posé généralement

$$U^{\mu,\nu,n}(y) = \frac{\mu+\nu+2n}{4}\sum_{p=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}-p+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}-p+1\right)}{\mu+\nu+2n-2p} \times \binom{\frac{\mu+\nu}{2}+n-p}{p}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-2p+1}.$$

Les séries (α), (β) sont fondamentales dans la théorie des séries *neumanniennes* de première et de deuxième espèce parce que l'on peut, à l'aide de ces séries et en appliquant l'intégrale de Cauchy, trouver une série *neumannienne* quelconque.

([1]) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XVIII, 1901, p. 65.

Il est bien connu que la fonction $O^{\mu,n}(y)$, polynome entier de $\frac{1}{y}$ de degré $n+1$, satisfait à une équation différentielle et non homogène de deuxième ordre, mais très analogue à celle connue pour $J^{\mu+n}(x)$. En outre, j'ai démontré, dans mes recherches susdites [1], que la fonction rationnelle $U^{\mu,-\mu,n}(y)$ satisfait aussi à une équation différentielle linéaire et homogène de quatrième ordre très analogue à (7). En somme, ces propriétés nous conduisent naturellement à chercher pour la fonction rationnelle $U^{\mu,\nu,n}$ une équation de cette forme

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & y^{\text{IV}} + \frac{a}{x}y''' + \left(\alpha + \frac{b}{x^2}\right)y'' \\ & \qquad + \left(\frac{\beta}{x} + \frac{c}{x^3}\right)y' + \left(\frac{\gamma}{x^2} + \frac{d}{x^4}\right)y = A_n(x). \end{aligned}\right.$$

Un simple calcul montrera que les coefficients inconnus de cette équation peuvent être déterminés à l'aide de ces deux identités :

$$4\left(\omega + \frac{\mu+\nu}{2}\right)\left(\omega + \frac{\mu+\nu}{2} + 1\right) \equiv \alpha(\omega+2)(\omega+3) - \beta(\omega+2) + \gamma,$$

$$\begin{aligned} & \omega(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3) - a\omega(\omega+1)(\omega+2) + b\omega(\omega+1) - c\omega + d \\ & \quad \equiv (\omega+\mu+1)(\omega+\nu+1)(\omega+\mu+\nu+n-1)(\omega-n-1), \end{aligned}$$

ce qui donnera

$$(13_a)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 4, \\ \beta &= 16 - 4(\mu+\nu), \\ \gamma &= 8 - 6(\mu+\nu) + (\mu+\nu)^2; \end{aligned}\right.$$

$$(12_b)\quad \left\{\begin{aligned} a &= 6 - 2(\mu+\nu), \\ b &= 5 - n^2 - \mu\nu + (\mu+\nu)(\mu+\nu+n-6), \\ c &= \mu\nu(3-\mu-\nu) + (n+1)(\mu+\nu+1)(\mu+\nu+n-1), \\ d &= -(\mu+1)(\nu+1)(n+1)(\mu+\nu+n+1). \end{aligned}\right.$$

---

(1) *Loc. cit.*, p. 74

La dernière de nos identités montre encore que le coefficient de x^{-n-5} s'évanouit, tandis que les coefficients x^{-3} ou de x^{-4} déterminent la fonction $\mathrm{A}_n(x)$ comme voici :

$$(13_c)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_{2n}(x) &= \frac{\mu+\nu}{8}\left(\frac{\mu+\nu}{2}+2n\right)\\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\binom{\frac{\mu+\nu}{2}+n-1}{n}\left(\frac{2}{x}\right)^3,\\ \mathrm{A}_{2n+1}(x) &= \frac{\mu+\nu}{8}\left(\frac{\mu+\nu}{2}+2n+1\right)\\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)\binom{\frac{\mu+\nu}{n}+n}{n}\left(\frac{2}{x}\right)^4, \end{aligned}\right.$$

expressions qui montrent immédiatement que l'équation (13) deviendra homogène si nous supposons $\mu+\nu=0$. Dans l'autre cas particulier $\mu=\nu$ nous obtiendrons, par la méthode habituelle, cette équation analogue à (10) :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &y'''+\frac{4-2\mu}{x}y''+\left(4+\frac{1-n^2+\mu(\mu-n-4)}{x^2}\right)y'\\ &\quad+\left(\frac{8-4\mu}{x}+\frac{(n+1)(n-1+\mu)(1+\mu)}{x^3}\right)y=\mathrm{A}_n(x), \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(14_a)\quad \mathrm{A}_{2n}(x) = \frac{\mu+2n}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}{\mu+n}\binom{\mu+n}{n}(1-\mu)\left(\frac{2}{x}\right)^2,$$

$$(14_b)\quad \mathrm{A}_{2n+1}(x) = -\mu\,\frac{\mu+2n+1}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}{\mu+n+1}\binom{\mu+n+1}{n}\left(\frac{2}{x}\right)^3.$$

Dans le cas particulier $\mu=0$, l'équation (14) se présente sous cette forme élégante :

$$(15)\quad \begin{cases} y''' + \dfrac{4}{x}y'' + \left(4 + \dfrac{1-n^2}{x^2}\right)y' \\ \qquad + \left(\dfrac{8}{x} + \dfrac{n^2-1}{x^3}\right)y = \dfrac{4\cos^2\dfrac{n\pi}{2}}{x^2}, \end{cases}$$

analogue à (6). Supposons n pair; notre fonction y deviendra identique à celle de M. C. Neumann.

Les résultats ainsi obtenus montrent clairement une nouvelle analogie parfaite entre les séries *neumanniennes* de première et de deuxième espèce, analogie qui peut être démontrée, en vertu des formules (16) et (17) dans mes recherches susdites, aussi pour les séries *kapteyniennes*.

Remarquons encore que le polynome de Lommel ([1])

$$R^{\mu,\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{\mu+1}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!} \binom{\mu+n-s}{n-2s} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s},$$

qui joue un rôle fondamental dans la théorie des fonctions cylindriques, satisfait aussi à une équation différentielle linéaire et homogène de quatrième ordre complètement analogue à (7) et à (13) pourvu que $\mu+\nu=0$. Cette équation est due à M. Hurwitz ([2]); elle peut être démontrée aisément à l'aide des propriétés fondamentales du polynome R, comme je l'ai fait voir récemment ([3]). Du reste notre équation peut être déduite aussi directement en suivant la méthode habituellement appliquée dans les pages précédentes.

([1]) *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 108, 112-116. *Voir* aussi les Mémoires publiés par MM. Craf et Crelier et par moi dans les *Annali di Matematica*, 2e série, t. XXIII et XXIV; 3e série, t. V.

([2]) *Mathematische Annalen*, t. XXXIII, 1889, p. 251.

([3]) *Annali di Matematica*.