E. IAGGI

Détermination des fonctions d'une variable qui admettent les substitutions d'un groupe quelconque donné, et seulement ces substitutions-là

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 368-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__368_0>

[D]

DÉTERMINATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE QUI ADMETTENT LES SUBSTITUTIONS D'UN GROUPE QUELCONQUE DONNÉ, ET SEULEMENT CES SUBSTITUTIONS-LÀ;

PAR M. E. IAGGI.

Nous avons vu, dans une Note précédente [1], que toute fonction $F(x)$ qui admet des substitutions données qui la laissent invariable, admet aussi toutes les substitutions qu'on peut obtenir par inversion, itérations ou combinaisons quelconques des substitutions considérées, c'est-à-dire *tout le groupe de substitutions* qu'on peut former avec les substitutions données. Nous avons vu comment, étant données des substitutions, on peut former le groupe le plus simple qui les contienne. Enfin, nous avons démontré que toutes les fonctions complètes uniformes qui admettent les substitutions d'un groupe donné, et seulement ces substitutions-là, ou, dans notre langage abrégé, que toutes les fonctions *périodiques* uniformes d'un groupe G donné, sont, lorsqu'il en existe, les intégrales d'une équation de la forme

$$\frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} = \chi(x),$$

ou les quotients des intégrales Θ d'une certaine équation

(1) *Propriétés générales des substitutions à une variable et des fonctions qu'elles laissent invariables* (*Nouvelles Annales*, octobre 1901).

différentielle, linéaire et homogène, du second ordre, dont les coefficients ne dépendent que du groupe G donné.

Nous nous proposons, dans la Note présente, de déterminer, à l'aide de substitutions quelconques données, les coefficients de ces deux équations différentielles et la formule générale du multiplicateur des fonctions Θ.

1. Supposons donc que l'on se donne un groupe G de substitutions et, tout d'abord, plaçons-nous dans le cas où les fonctions $F(x)$ de groupe G sont des fonctions complètes uniformes; le groupe G doit alors être nécessairement *discontinu*.

Connaissant à l'avance la forme des équations que nous cherchons, on pourrait se proposer de les *construire*, c'est-à-dire, considérant leurs coefficients comme des inconnues, de chercher à construire ces coefficients de manière que les fonctions $F(x)$ restent invariables par les substitutions du groupe, et que les fonctions Θ se trouvent multipliées par un même facteur.

Nous préférons à cette méthode une méthode entièrement analytique qui, comme tous les théorèmes démontrés dans nos précédentes Notes sur ce sujet, a son origine dans l'équation

$$F(s) = F(x), \tag{1}$$

à laquelle satisfont toutes les substitutions du groupe donné et seulement celles-là, $F(x)$ étant l'une des fonctions cherchées.

Cette équation fonctionnelle est explicite par rapport à l'inconnue $F(x)$, mais est implicite par rapport aux données $s_i(x)$, et il serait assez difficile d'exprimer que l'équation (1), sous cette forme, a pour racines les substitutions du groupe donné. Nous allons d'abord chercher à mettre cette équation fonctionnelle sous forme explicite par rapport aux données $s_i(x)$. Cette transformation devient facile en faisant usage des *périodes*

$$p_i(x) = s_i(x) - x.$$

On a en effet, en posant $s = x + p$,

$$F(x+p) = F(x), \tag{2}$$

et l'on est conduit à développer $F(x+p)$ en série ordonnée par rapport aux puissances de p, dans l'hypothèse, bien entendu, où ce développement est possible.

Suppression faite du facteur p, c'est-à-dire de la racine nulle $p = 0$, qui correspond à la racine $s = x$ de l'équation (1), l'équation (2) prend la forme

$$F'(x) + p\frac{F''(x)}{1.2} + p^2\frac{F'''(x)}{1.2.3} + \ldots = 0. \tag{3}$$

Il s'agit d'exprimer que cette équation en p a pour racines les périodes $p_i(x) = s_i(x) - x$ *et seulement ces quantités-là*. Or nous avons vu [1] comment s'expriment de telles conditions dans le cas où la série donnée est le développement d'une fonction *entière* :

Si

$$1 + \frac{A_1}{1}x + \frac{A_2}{1.2}x^2 + \ldots$$

est le développement d'une fonction entière, pour que cette fonction ait pour zéros d'ordre *un* des points donnés

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_i, \quad \ldots,$$

il est nécessaire et suffisant que les coefficients A satis-

---

[1] *Relations entre les zéros et les coefficients des fonctions entières* et *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouvelles Annales*, janvier 1901 et mai 1902).

fassent à des relations de la forme

$$A_1 = \sum_i \left(g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right),$$

$$A_2 = \sum_i \left(g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2}\right) + \left[\sum_i \left(g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right)\right]^2,$$

$$\begin{aligned} A_3 = &\sum_i \left(g'''_i(0) - \frac{2}{a_i^3}\right) \\ &+ \sum_i \left(g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2}\right) \sum_i \left(g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right) \\ &+ \left[\sum_i \left(g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right)\right]^3, \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

où les quantités $g'_i(0)$, $g''_i(0)$, ... ($i = 1, 2, \ldots$), sont les valeurs pour $x = 0$ des dérivées par rapport à x de certaines fonctions entières $g_i(x)$ qui rendent convergente la série

$$\sum_i \left(g'_i(x) + \frac{1}{x - a_i}\right),$$

ou, ce qui revient au même, sont des quantités qui rendent convergentes les séries indiquées dans les relations précédentes

$$\sum_i \left(g_i^{(n)}(0) - \frac{(n-1)!}{a_i^n}\right);$$

lorsque $\sum_i \frac{1}{a_i}$ est convergente, *il suffit* d'annuler, dans les relations précédentes, toutes les quantités $g_i^{(n)}(0)$ (mais cela n'est pas *nécessaire*).

A l'égard de la série (3), où la variable est p et non pas x, on doit remarquer que :

1° Les racines p_i sont d'ordre *un*, sauf lorsque x est en un point multiple du groupe, ce que nous ne supposons pas; nous avons, en effet, démontré dans une précédente Note que les racines s_i de l'équation (1), et par suite les racines p_i des équations (2) et (3), sont d'ordre *un* lorsque x n'est pas un point multiple; le premier membre de l'équation (3) n'est le développement d'une fonction entière qu'autant que $F(x)$ est une fonction entière.

2° Supposons donc tout d'abord qu'il existe des fonctions $F(x)$ entières du groupe donné; en exprimant que les zéros de la série en p (3) sont les quantités $p_i(x)$ et sont des zéros d'ordre *un*, nous aurons les identités

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{F''(x)}{F'(x)} &= \sum_i\left(h_i(x)-\frac{1}{p_i(x)}\right),\\
\frac{1}{3}\frac{F'''(x)}{F'(x)} &= \sum_i\left(k_i(x)-\frac{1}{p_i^2(x)}\right)\\
&\quad+\left[\sum_i\left(h_i(x)-\frac{1}{p_i(x)}\right)\right]^2,\\
\frac{1}{4}\frac{F^{\text{IV}}(x)}{F'(x)} &= \sum_i\left(l_i(x)-\frac{2!}{p_i^3(x)}\right)\\
&\quad+\sum_i\left(k_i(x)-\frac{1}{p_i^2(x)}\right)\sum_i\left(h_i(x)-\frac{1}{p_i(x)}\right)\\
&\quad+\left[\sum_i\left(h_i-\frac{1}{p_i(x)}\right)\right]^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

où les quantités h_i, k_i, l_i, ... rendent convergentes les séries indiquées; lorsque $\sum\frac{1}{p_i^\omega}$ est convergente, on peut supprimer ces quantités dans les séries relatives aux puissances des p_i supérieures à ω; en particulier, si $\sum\frac{1}{p_i}$ est convergente, *il suffit* que soient satisfaites les relations (4), dans lesquelles on annule toutes ces quantités h_i, k_i, ... Toutes ces quantités h_i, k_i, ... sont généralement fonctions de x, car il ne faut pas oublier que l'identification se fait par rapport à p.

Enfin cette identification n'a un sens que si $F(x+p)$ est développable par la série de Taylor *dans une aire qui contient, avec le point x, tous les transformés*

$$s_i(x) = x - p_i(x)$$

du point x par les substitutions du groupe.

Dans ces conditions, les relations (4) *expriment* que les équations (3), (2), (1) sont satisfaites respectivement par les périodes p_i et les substitutions s_i du groupe et *seulement par celles-là,* et par conséquent que la fonction $F(x)$ *est une fonction entière du groupe donné.*

Or, la première des relations (4) suffit à déterminer les fonctions entières du groupe donné; on en tire, avec deux constantes arbitraires,

$$(5) \qquad F(x) = \lambda \int e^{2\int \sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx} dx - \mu$$

ou

$$(5) \qquad F(x) = \lambda \int \prod_i e^{2\int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx} dx - \mu.$$

$F(x)$ étant ainsi déterminée, les équations (4) autres que la première donnent par l'élimination de F des relations entre les périodes, c'est-à-dire entre les substitutions du groupe. Nous ne chercherons pas, au moins en ce moment, à interpréter ces relations et nous nous contenterons de dire :

S'il existe des fonctions uniformes périodiques entières du groupe donné de substitutions, ces fonctions sont données par les formules (5), *où les quantités h_i,* *fonctions de x, rendent convergente la série*

$$\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right),$$

ou, ce qui est identique, rendent convergent le produit

$$\lambda \prod_i e^{2\int\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)dx},$$

et, lorsque $\sum \frac{1}{p_i}$ est convergente, *il suffit* d'annuler ces quantités h_i.

Toutes les fonctions uniformes du groupe donné sont alors, comme on sait, données par la formule

$$\frac{\lambda\,F(x) + \mu}{\nu\,F(x) + \rho},$$

où $F(x)$ est l'une des fonctions précédentes.

2. Considérons maintenant le cas de fonctions uniformes du groupe donné, qui ne sont pas des fonctions entières. L'équation (2) se met sous la forme

$$\frac{\Theta_1(x+p)}{\Theta_2(x+p)} = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_2(x)}, \tag{6}$$

où Θ_1 et Θ_2 sont des fonctions entières (auxquelles nous avons donné le nom de *fonctions à multiplicateur*), en sorte que le cas des fonctions $F(x)$ entières est compris dans celui-ci.

L'équation (6) se met sous la forme

$$\Theta_2(x)\,\Theta_1(x+p) - \Theta_1(x)\,\Theta_2(x+p) = 0,$$

où le premier membre est une fonction *entière* de p. Supposons que les fonctions Θ soient développables en série dans une aire comprenant, avec le point x, tous les transformés $s_i = x + p_i$ de ce point x; l'équation précédente se met sous la forme

$$(7)\quad \Theta_2\Theta_1' - \Theta_1\Theta_2' + p\,\frac{\Theta_2\Theta_1'' - \Theta_1\Theta_2''}{1.2} + p^2\,\frac{\Theta_2\Theta_1''' - \Theta_1\Theta_2'''}{1.2.3} + \ldots = 0,$$

où nous avons supprimé le facteur p, qui correspond à la racine $s = x$ de l'équation (1), et écrit $\Theta^{(n)}$ au lieu de $\frac{d^n\Theta(x)}{dx^n}$.

Les périodes données $p_i = s_i - x$ doivent être les racines de cette équation et, de plus, elles en sont racines d'ordre *un*.

Le premier membre de l'équation (7) étant le développement en série d'une fonction *entière* de p, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros de cette série soient les périodes données p_i, et seulement ces quantités-là, et que tous ces zéros soient d'ordre *un*, s'expriment, selon notre théorème général, par les identités

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\frac{\Theta_2\Theta_1'' - \Theta_1\Theta_2''}{\Theta_2\Theta_1' - \Theta_1\Theta_2'} &= \sum_i\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right),\\
\frac{1}{3}\,\frac{\Theta_2\Theta_1''' - \Theta_1\Theta_2'''}{\Theta_2\Theta_1' - \Theta_1\Theta_2'} &= \sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + \left[\sum_i\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\right]^2,\\
\frac{1}{4}\,\frac{\Theta_2\Theta_1^{\text{IV}} - \Theta_1\Theta_2^{\text{IV}}}{\Theta_2\Theta_1' - \Theta_1\Theta_2'} &= \sum_i\left(l_i - \frac{2}{p_i^3}\right)\\
&\quad + \sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right)\sum\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\\
&\quad + \left[\sum_i\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\right]^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

où les fonctions de x, h_i, k_i, l_i, ... rendent convergentes les séries indiquées dans les seconds membres et peuvent être annulées identiquement lorsque $\sum_i \frac{1}{p_i(x)}$ est convergente.

Soit $\Phi(x)$ la fonction déterminée, à un facteur constant près, par la formule

$$(9) \qquad \Phi(x) = e^{2\int \sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx} = \prod_i e^{2\int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx},$$

et posons

$$(9') \quad \begin{cases} \Psi(x) = 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + 3\left[\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\right]^2 \\ \qquad = 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + 3\frac{\Phi'^2(x)}{4\Phi^2(x)}. \end{cases}$$

Les deux premières équations (8) donnent :

$$\Theta_2\Theta'_1 - \Theta_1\Theta'_2 = \Phi.$$
$$\Theta_2\Theta''_1 - \Theta_1\Theta''_2 = \Phi',$$
$$\Theta_2\Theta'''_1 - \Theta_1\Theta'''_2 = \Phi\Psi.$$

Dans ce système de trois équations, remplaçons la troisième par celle qu'on obtient en retranchant celle-ci de la dérivée de la seconde et considérons le système de trois équations

$$(10) \quad \begin{cases} \Theta_2\Theta'_1 - \Theta_1\Theta'_2 = \Phi, \\ \Theta_2\Theta''_1 - \Theta_1\Theta''_2 = \Phi', \\ \Theta'_2\Theta''_1 - \Theta'_1\Theta''_2 = \Phi'' - \Phi\Psi. \end{cases}$$

Ces équations déterminent Θ_1 et Θ_2; multipliant les deux membres de la première par Θ''_1, ceux de la seconde par $-\Theta'_1$, ceux de la troisième par Θ_1, et ajoutant, Θ_2 se trouve éliminée et l'on a

$$\Phi\Theta''_1 - \Phi'\Theta'_1 + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta_1 = 0.$$

En éliminant de la même manière Θ_1, on retombe sur la même équation où Θ_1 est remplacée par Θ_2.

Il s'ensuit que toutes les fonctions à multiplicateur du groupe

$$\Theta = \lambda\Theta_1 + \mu\Theta_2,$$

sont les intégrales de l'équation linéaire, homogène et du second ordre :

$$(11) \qquad \Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + (\Phi'' - \Phi\Psi')\Theta = 0.$$

Les équations (8) autres que les deux premières qui nous fournissent l'équation (11) donneraient, par l'élimination de Θ_1 et Θ_2, des relations nécessaires pour l'existence des fonctions $F(x)$, entre les périodes ou les substitutions du groupe donné. Nous pouvons donc conclure, sans d'ailleurs interpréter d'une façon plus complète ces relations entre les substitutions du groupe : *s'il existe des fonctions uniformes* $F(x)$ *du groupe donné, ces fonctions sont les quotients des fonctions* Θ, *intégrales de l'équation* (11).

3. Désignons par $\theta(s, x)$ le rapport

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta(x)},$$

c'est-à-dire le multiplicateur commun de toutes les fonctions Θ du groupe, correspondant à une substitution s du groupe.

Si $F(x)$ est l'une des fonctions périodiques du groupe, on a :

$$F(s) = F(x),$$

$$(12) \qquad F'(s)\,ds = F'(x)\,dx$$

pour toute substitution s du groupe. Soit

$$F(x) = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_2(x)},$$

d'où

$$(13)\quad \begin{cases} F'(x) = \dfrac{\Theta_2(x)\Theta_1'(x) - \Theta_1(x)\Theta_2'(x)}{\Theta_2^2(x)} = \dfrac{\Phi(x}{\Theta_2^2(x)}, \\ F'(s) = \dfrac{\Phi(s)}{\Theta_2^2(s)}. \end{cases}$$

L'équation (12) donne alors

$$\frac{\Phi(s)\,ds}{\Theta_2^2(s)} = \frac{\Phi(x)\,dx}{\Theta_2^2(x)}$$

ou

$$\frac{\Theta_2^2(s)}{\Theta_2^2(x)} = \frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx},$$

et par conséquent

$$(14)\qquad \theta(s, x) = \pm\sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx}},$$

où s est une substitution quelconque du groupe. Telle est la formule du *multiplicateur* $\theta(s, x)$ *de toutes les fonctions* Θ *du groupe.*

Il y a ambiguïté sur le signe; les applications que nous avons faites à des cas déjà étudiés complètement par d'autres méthodes nous ont montré qu'il faut prendre tantôt le signe $+$ et tantôt le signe $-$; mais nous n'avons pu lever cette ambiguïté dans la formule générale.

Les relations (8), (10), (11) que nous venons de trouver conviennent au cas des fonctions entières; il suffit, en effet, de supposer $\Theta_2 =$ const. dans les relations (8) et (10). Alors, l'une des fonctions entières $F(x)$ est la fonction Θ, et l'on voit que la fonction $\Phi(x)$ donnée par la formule (9) est la dérivée de l'une de ces fonctions entières (13), ce qui concorde avec les formules (5) que nous avons démontrées directement dans l'hypothèse où existent des fonctions uniformes entières du groupe donné.

Dans ce cas, l'équation (11) aux fonctions à multiplicateur doit admettre la solution $\Theta = \text{const.}$ Il est donc nécessaire que les substitutions du groupe satisfassent à l'identité

$$(15) \qquad \Phi'' - \Phi\Psi = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'équation en Θ se réduit à

$$(16) \qquad \Phi\theta'' - \Phi'\theta' = 0,$$

d'où

$$\theta = \lambda \int \Phi \, dx + \mu,$$

et ces fonctions Θ sont des fonctions périodiques *entières* du groupe, l'une des intégrales de (16) se réduisant à une constante.

La relation (15), *entre les substitutions du groupe donné, est donc la condition nécessaire et suffisante pour que, parmi les fonctions périodiques du groupe donné, il en existe qui soient entières.*

Cette relation (15) n'est d'ailleurs autre que la première des relations entre les substitutions du groupe, qu'on déduit de l'élimination de $F'(x) = \lambda\,\Phi(x)$, entre les conditions (4) établies directement dans l'hypothèse où existent des fonctions entières $F(x)$ du groupe donné. Si dans les relations (8) on suppose $\Phi'' = \Phi\Psi$, on retrouve les relations (4).

4. Formons enfin l'équation aux quotients des intégrales de l'équation en Θ; on trouve sans difficulté, en se servant des équations (10) et (13),

$$(17) \qquad 2\frac{F'''}{F'} - 3\frac{F''^2}{F'^2} = 6\frac{\Phi''}{\Phi} - 3\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} - 4\Psi.$$

Telle est l'équation *aux fonctions uniformes du groupe donné,* lorsqu'il en existe ([1]).

Lorsqu'il existe des fonctions uniformes du groupe donné, ces fonctions seront complètement déterminées par l'équation (17) ou par l'équation (11) aux fonctions à un multiplicateur lorsqu'on aura formé les fonctions Φ et Ψ par les formules (9) et (9').

Lorsque la série $\sum_i \frac{1}{p_i}$ est convergente, il n'y a aucune difficulté, car on n'aura qu'à annuler les quantités h_i et k_i dans les formules (9) pour avoir Φ et Ψ. Lorsque cette série $\sum_i \frac{1}{p_i}$ n'est pas convergente, il faut introduire des fonctions $h_i(x)$ qui rendent convergente la série

$$\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right).$$

Lorsque $\sum \frac{1}{p_i^2}$ n'est pas non plus convergente, il faut introduire des fonctions $k_i(x)$ telles que

$$\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right)$$

soit convergente. On ne sait pas autre chose sur ces fonctions $h_i(x)$, $k_i(x)$; on peut donc trouver d'une infinité de manières des fonctions h_i, k_i répondant à ces conditions. Toutefois, il est certain que ces fonctions ne donneront des fonctions $F(x)$ admettant les substitutions du groupe, et *seulement* celles-là, qu'autant qu'elles seront *convenablement choisies.* Il reste donc

([1]) Tous ces résultats ont été publiés pour la première fois par l'auteur dans ses *Recherches sur la théorie des fonctions* (Besançon, 1897).

une ambiguïté dans la détermination des fonctions périodiques uniformes d'un groupe donné, lorsque la série $\sum\limits_i \frac{1}{p_i}$ n'est pas convergente; et si, dans un cas où $\sum\limits_i \frac{1}{p_i}$ n'est pas convergente, on a obtenu des fonctions uniformes $F(x)$ par un certain choix de fonctions h_i, k_i, il sera nécessaire ensuite de vérifier que les fonctions $F(x)$ obtenues n'admettent que les substitutions du groupe.

Pour former les fonctions Φ et Ψ dans les applications, on remarquera que les substitutions d'un groupe d'ordre *un* sont obtenues par itération ou inversion de l'une d'elles et, par conséquent, ont entre elles quelque chose de commun; on décomposera donc le groupe donné en sous-groupes d'ordre *un* : chacun de ces sous-groupes donnera un facteur dans Φ et un terme dans la série $\sum\limits_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right)$ qui forme le terme indépendant de Φ dans Ψ. Dans chaque sous-groupe d'ordre *un*, il sera bon d'associer deux à deux les périodes des substitutions inverses les unes des autres sous la forme

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_{-i}}, \quad \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_{-i}^2}.$$

5. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé qu'il existait des fonctions complètes uniformes du groupe donné, ce qui supposait implicitement que le groupe était discontinu. Nous savons qu'on ne peut affirmer l'existence de ces fonctions *uniformes*, et même que, lorsque le groupe est *continu* (*improprement*), ce groupe ne peut appartenir qu'à des fonctions complètes multiformes périodiques qui sont *linéales ou aréales* (*improprement*). Cette hypothèse de l'existence de fonctions *uniformes* du groupe donné nous a permis d'exprimer

les conditions *nécessaires et suffisantes* (8) pour que l'équation (1),

$$F(s) = F(x),$$

soit satisfaite par toutes les substitutions du groupe donné, *et seulement par celles-là,* et nous en avons déduit que, *nécessairement,* les fonctions $\Theta(x)$ et $F(x)$ sont respectivement les intégrales des équations (11) et (17), ce qui donne un moyen de recherche des fonctions uniformes d'un groupe donné.

Lorsqu'il n'existe pas de fonction uniforme du groupe donné, on ne peut affirmer qu'il existe des fonctions complètes multiformes périodiques de ce groupe, ni que ces fonctions pourront être obtenues de la même manière que les fonctions uniformes. Cependant nous savons que certaines fonctions multiformes sont décomposables en facteurs primaires, que par suite ces fonctions multiformes satisfont aux conditions que nous avons établies pour que leurs zéros soient des zéros donnés [1]; d'autre part, nous savons que, quelle que soit la fonction $F(x)$, les périodes p_i sont des racines *d'ordre un* de l'équation (2) : par conséquent, *s'il existe des fonctions complètes multiformes périodiques d'un groupe donné qui soient dans les conditions précédentes, ces fonctions seront déterminées, au moyen des substitutions du groupe, par les équations* (11) *ou* (17), ceci, dans l'hypothèse où n'existent pas des fonctions uniformes du groupe [2].

On est donc conduit dans tous les cas à former les équations (11) et (17). Si leurs intégrales sont uniformes,

---

[1] *Relations entre les zéros et les coefficients des fonctions entières* et *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouvelles Annales,* janvier 1901 et mai 1902).

[2] *Recherches sur la théorie des fonctions* (Besançon, 1897).

on peut être assuré qu'elles admettent les substitutions données, et dans ce cas, si $\sum_i \frac{1}{p_i}$ est convergente, elles n'admettent *certainement* que ces substitutions-là ; si les intégrales de (11) et (17) sont multiformes, il y aura lieu de vérifier si ces fonctions admettent les substitutions du groupe, et seulement celles-là.