C.-A. LAISANT

Analogies entre les courbes funiculaires et les trajectoires d'un point mobile

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 343-348
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__343_1>

ANALOGIES ENTRE LES COURBES FUNICULAIRES ET LES TRAJECTOIRES D'UN POINT MOBILE;

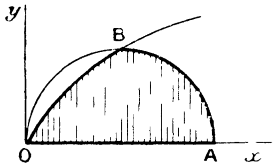
PAR M. C.-A. LAISANT.

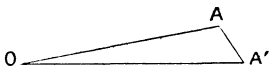
On a depuis longtemps remarqué l'analogie qui se rencontre entre la théorie des courbes funiculaires, formes d'équilibre d'un fil inextensible dont la grosseur est supposée nulle, et celle de la trajectoire d'un point matériel. Il peut être intéressant de constater que ce rapprochement n'est pas le résultat d'une coïncidence fortuite, mais qu'il provient au contraire de la nature même des choses. C'est ce que nous nous proposons de montrer ici.

Si l'on considère un élément MM′ de la trajectoire

(1) *Voir* page 184 du présent Volume.

d'un point mobile, et si l'on mène les deux vecteurs infiniment voisins OA, OA′, qui représentent les vitesses en M et M′, l'accélération w du mouvement





s'obtiendra par définition en divisant par dt le vecteur AA′, c'est-à-dire qu'on aura

$$\mathrm{AA}' = w\,dt.$$

Si l'on considère un élément MM′ d'une courbe funiculaire, et si F est la force appliquée à cet élément, rapportée à l'unité de longueur, on démontre que la force appliquée $\mathrm{F}\,ds$ et les deux tensions appliquées aux extrémités de l'élément doivent se faire équilibre. Par suite, si l'on mène un vecteur OA_1, équipollent à la tension T en M, dirigée suivant la tangente en ce point, un vecteur OA'_1 équipollent à la tension en M′, et un vecteur OB équipollent à la force $\mathrm{F}\,ds$, on aura

$$\mathrm{OA}_1 + \mathrm{OA}'_1 + \mathrm{OB} = 0, \qquad \mathrm{OA}_1 + \mathrm{OA}'_1 = -\,\mathrm{OB}.$$

Construisant $\mathrm{OA} = -\,\mathrm{OA}_1$, $\mathrm{OA}' = +\,\mathrm{OA}'_1$, on aura donc

$$\mathrm{OB} = -\,\mathrm{AA}',$$

c'est-à-dire que la construction sera identiquement la même que celle figurée plus haut. Il s'ensuit que, dans cette figure, les vecteurs OA, OA′ peuvent être considérés comme représentant soit les deux vitesses infiniment voisines en deux points infiniment rapprochés de la trajectoire, soit les deux tensions (*portées dans le même sens*) en ces deux mêmes points de la courbe considérée comme forme d'équilibre d'un fil.

Dans le premier cas, le vecteur AA' aura pour expression $w\,dt$, et dans le second $-\mathrm{F}\,ds$.

La correspondance pourra donc s'établir entièrement en posant d'une façon générale

$$\mathrm{T} = kv, \qquad \mathrm{F}\,ds = -kw\,dt, \qquad \mathrm{F} = -kw\frac{dt}{ds} = -k\frac{w}{v}.$$

Nous introduisons ici ce coefficient constant k, qui peut numériquement devenir égal à l'unité, afin de respecter l'homogénéité; il a évidemment pour dimensions 1 par rapport à la masse et -1 par rapport au temps; il faut d'ailleurs se rappeler que F n'est pas une force, mais le quotient d'une force par une longueur.

Les formules ci-dessus permettent de passer des courbes funiculaires aux trajectoires, et les suivantes, qu'on en tire,

$$v = \frac{\mathrm{T}}{k}, \qquad w = -\frac{\mathrm{F}}{k}\frac{ds}{dt} = -\frac{\mathrm{F}}{k}v = -\frac{\mathrm{FT}}{k^2},$$

permettent le passage inverse.

Si l'on considère les composantes, tangentielle et normale, de l'accélération, on a

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la courbe. Donc les deux composantes de $-\frac{\mathrm{FT}}{k^2}$ seront respectivement

$$\frac{d\mathrm{T}}{k\,dt} = \frac{1}{k}\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{k}v\frac{d\mathrm{T}}{ds} = \frac{\mathrm{T}}{k^2}\frac{d\mathrm{T}}{ds}$$

et

$$\frac{\mathrm{T}^2}{k^2\rho}.$$

Divisant les trois vecteurs par $\frac{T}{k^2}$, il s'ensuit que les deux composantes de $-F$ sont

$$F_t = \frac{dT}{ds}, \qquad F_n = \frac{T}{\rho},$$

comme on le sait.

Ces formules montrent que la composante tangentielle de la force appliquée en chaque élément influe exclusivement sur les variations de la tension, et la composante normale sur la courbure du fil.

Dans un mouvement, l'accélération est la dérivée géométrique de la vitesse par rapport au temps. Dans une courbe funiculaire, la force F est (en sens contraire) la dérivée géométrique de la tension par rapport à la longueur du fil.

Il nous suffira, en terminant cette Note, de faire ressortir quelques exemples particuliers d'analogies.

La courbe d'équilibre des ponts suspendus (limite du polygone funiculaire) correspond au mouvement parabolique des corps pesants dans le vide. Dans le premier cas, la composante horizontale de la tension est constante, et, dans le second, c'est la composante horizontale de la vitesse.

Dans le mouvement circulaire uniforme, la vitesse et l'accélération sont constantes en grandeur, et l'accélération est partout normale à la trajectoire. Le cercle sera par conséquent la forme d'équilibre d'un fil sans fin dont tous les éléments seraient également repoussés par un centre intérieur.

Dans tout mouvement d'accélération centrale, la trajectoire est plane, et la double vitesse aréolaire $\frac{r^2\,d\theta}{dt} = C$ est constante. Pour toute forme d'équilibre d'un fil résultant de forces qui émanent d'un centre fixe, la courbe sera plane, et l'on aura

$$C = \frac{r^2\, d\theta}{k\, ds} T = \frac{r}{k} \frac{r\, d\theta}{ds} T.$$

Si O est le centre des forces, M un point de la courbe et MP la tension, l'aire du triangle OMP est donc constante.

Dans le cas actuel, l'accélération est donnée par la formule de Binet :

$$w = \frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Il s'ensuit que la force F a pour expression

$$F = T\, \frac{r^2\, d\theta^2}{ds^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right) = \frac{k^2\, C^2}{T\, r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

On a aussi l'expression

$$F = kC\, \frac{d\theta}{ds}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Si V désigne l'angle de la tangente à la courbe avec le rayon vecteur, nous pouvons écrire

$$\frac{F}{T} = \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{v}}{d\theta^2}\right) \sin^2 V.$$

On a donc ainsi, pour toute courbe funiculaire due à une force centrale, l'expression du rapport, en chaque point, entre la force rapportée à l'unité de distance et la tension, en fonction des seuls éléments géométriques de la courbe.

Nous avons, également,

$$F = \frac{kC}{r} \sin V\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Si une courbe funiculaire affecte la forme d'une ellipse sous l'action de forces émanant du centre, la force F est en chaque point proportionnelle à $\frac{r^2\,d\theta}{ds}$.

Si elle affecte la même forme sous l'action de forces émanant d'un foyer, la force F est en chaque point proportionnelle à $\frac{d\theta}{ds}$.

Enfin, comme unique exemple du passage d'un problème funiculaire à une question de Cinématique, nous ferons remarquer que la chaînette serait décrite par un point matériel sous l'action d'une force de direction constante proportionnelle à la vitesse; car F est constant, et l'on a

$$w = \frac{\mathrm{FT}}{k^2} = \frac{\mathrm{F}}{k^2}vk = \frac{\mathrm{F}}{k}v.$$