NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 2 (1902), p. 333-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__333_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

# SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

## 1844.

(1900, p. 191.)

*Les axes des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible à un cercle sont tangentes à une parabole qui touche les trois diagonales du quadrilatère.*

(A. Pellet.)

## 1845.

(1900, p. 191.)

*Les plans principaux des quadriques inscrites dans la développable définie par une sphère et une quadrique quelconque sont tangents à une développable circonscrite à des paraboloïdes qui touchent les quatre faces du tétraèdre conjugué par rapport à la sphère et à la quadrique.* (A. Pellet.)

### SOLUTION

Par M. Alpha.

1844. On sait que le lieu des pôles d'une droite $\Delta$ par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel est une droite $\Delta'$ : si $\Delta$ est axe de l'une de ces coniques, $\Delta'$ lui sera perpendiculaire, et réciproquement. Si donc le faisceau comprend un cercle, $\Delta'$ sera la perpendiculaire abaissée sur $\Delta$ du centre $\omega$ de ce cercle : il en résulte que $\Delta$ sera la polaire de $\omega$ par rapport à une des coniques du faisceau. Or l'enveloppe de ces polaires est, comme on sait, une conique inscrite au triangle conjugué commun à ces coniques, et c'est, de plus, une parabole, puisque la droite de l'infini est la polaire de $\omega$ par rapport au cercle du faisceau.

1845. On sait que le lieu des pôles d'un plan P par rapport aux quadriques d'un faisceau tangentiel est une droite $\Delta$ : si P est plan principal de l'une de ces quadriques, $\Delta$ lui sera perpendiculaire, et réciproquement. Si donc le faisceau comprend une sphère, $\Delta$ sera la perpendiculaire abaissée sur P du centre $\omega$ de cette sphère : il en résulte que P sera le plan polaire de $\omega$ par rapport à une des quadriques du faisceau. Or l'enveloppe de ces plans polaires est, comme on sait, une développable de troisième classe, circonscrite à des quadriques qui touchent les faces du tétraèdre conjugué commun au faisceau tangentiel envisagé; de plus, cette développable touche bien le plan de l'infini, qui est le plan polaire de $\omega$ par rapport à la sphère du faisceau.

## 1846.

(1900, p. 191.)

*Si* O *et* $O_1$ *sont les foyers d'une conique inscrite à un triangle* ABC, *on sait que les projections de ces points sur les côtés de* ABC *appartiennent au cercle homographique.*

I. *Si le point* O *décrit une droite* $\Delta$, *le point* $O_1$ *décrit une conique circonscrite à* ABC.

II. *Construire la conique* A, B, C, D, E *et déterminer* GRAPHIQUEMENT *sa nature.*

III. *Le lieu des points* O *et* $O_1$ *pour lesquels la droite* $OO_1$ *passe par un point fixe* P, *auquel en correspond un autre* $P_1$, *est une cubique* $r$ *dont on obtient aisément douze points et sept tangentes. Trouver les asymptotes.*

IV. *A la cubique* $r$ *en correspond une autre* $r_1$, *relative à* $P_1$, *et ayant avec* $r$ *neuf points communs.*

(P. Sondat.)

### SOLUTION

Par un abonné.

I. Les points O et $O_1$ sont *inverses* par rapport au triangle ABC. On sait que l'inverse d'une droite est une conique circonscrite au triangle ABC; les points cycliques se transforment l'un en l'autre; les centres $\omega$ des cercles inscrits et exinscrits sont les points doubles de cette transformation du second ordre, et les points O et $O_1$ sont conjugués à toutes les coniques qui passent par ces quatre points (hyperboles équilatères conjuguées au triangle ABC). *Voir,* par exemple, E. DUPORCQ, *Premiers principes de Géométrie moderne,* p. 136.

II. La transformée de la droite de l'infini étant le cercle circonscrit au triangle ABC, si $\Delta$ coupe, touche, ou ne coupe pas ce cercle, il lui correspond une hyperbole, une parabole ou une ellipse. Les tangentes en A, B, C sont, par rapport aux bissectrices des angles, symétriques des droites joignant les sommets du triangle ABC aux points où $\Delta$ coupe les côtés opposés.

III. Le lieu demandé revient à celui des tangentes menées de P aux hyperboles équilatères conjuguées au triangle ABC. Ce lieu passe évidemment par les quatre points doubles $\omega$, où les tangentes sont les droites $P\omega$; il passe de même par les points A, B, C et par les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$, où PA, PB et PC coupent les côtés opposés du triangle ABC. Enfin, il passe par P et par $P_1$, la tangente en P étant $PP_1$. Nous avons bien obtenu 12 points du lieu, et les tangentes en 5 d'entre eux. Ce lieu se transforme d'ailleurs évidemment en lui-même par inversion; or on sait qu'à toute courbe passant par $A_1$ en correspond une qui touche $AP_1$ en A. Donc, les tangentes en A, B et C concourent en $P_1$. Il en résulte que le lieu peut encore être considéré comme le lieu des points de contact des tangentes menées de $P_1$ aux coniques qui passent par A, B, C et P. On en déduit de même de nouveaux points et de nouvelles tangentes. On voit, en passant, que :

*Toute cubique se transforme en elle-même par la transformation du second ordre qui a pour points doubles les points de contact des tangentes issues d'un point quelconque de la courbe.*

Quant à la détermination des asymptotes, elle dépend du troisième degré, et revient à mener de P les tangentes à l'hypocycloïde enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères envisagées.

IV. La cubique $r_1$ correspondant à $P_1$ coupe évidemment $r$ aux points A, B, C, P, $P_1$ et aux quatre points $\omega$.

Autre solution par M. A. VACQUANT.

**1883.**

(1900, p. 572.)

*Par chaque point de l'espace on mène une perpendiculaire sur le plan polaire de ce point par rapport à une quadrique donnée. On a ainsi un complexe. Les droites du complexe situées dans un plan enveloppent une conique. Trouver le lieu des foyers de cette conique pour les plans parallèles à un plan donné.* (A. PELLET.)

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Le complexe dont il est question est bien connu : les cônes de ce complexe sont les cônes de Chasles relatifs à la quadrique. Ce complexe est tétraédral, le tétraèdre fondamental étant formé par le plan de l'infini et les plans principaux de la quadrique. Toute conique du complexe est donc une parabole. Quand le plan de cette parabole varie, en restant parallèle à lui-même, les paraboles obtenues sont homothétiques par rapport au centre, et le lieu de leurs foyers est donc une droite. Les droites du complexe sont les axes des sections planes de la quadrique donnée.