Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 320-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__320_1>

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fouret.** — Voulez-vous me permettre d'attirer un instant l'attention des lecteurs de votre Journal sur quelques remarques qui concernent le sujet de la Composition mathématique proposée cette année aux candidats à l'École Polytechnique et qui, en raison de cette circonstance, offrent peut-être quelque intérêt d'actualité?

Soient, par rapport à un système de trois axes de coordonnées rectangulaires OXYZ, un point P de coordonnées a, b, c et une courbe quelconque (C) du plan XOY dont nous représentons l'équation dans ce plan, rendue homogène, par

$$F(x, y, t) = 0.$$

Un calcul facile fournit, pour l'équation de la surface [S], lieu des projections orthogonales du point P sur les droites qui rencontrent à la fois OZ et la courbe (C),

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{x^2+y^2-ax-by}{x^2+y^2+z^2-ax-by-cz}\right) = 0.$$

Si la courbe (C) est du $n^{\text{ième}}$ ordre, et admet l'origine O comme point multiple d'ordre p, on voit immédiatement sur l'équation (1) que la surface [S] est d'ordre $3n-2p$ et admet OZ comme droite au $n^{\text{ième}}$ ordre de multiplicité, abstraction faite de la sphère

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$$

décrite sur OP comme diamètre, qui compte p fois dans le lieu complet [1].

---

[1] La plupart des remarques suggérées par l'équation de la surface s'expliquent géométriquement sans aucune difficulté.

On voit encore immédiatement sur l'équation (1) que la surface [S] a $n-p$ nappes passant par l'ombilicale et contient le point P comme point multiple d'ordre $n-p$. Un calcul très simple montre en outre que tout plan passant par OZ coupe [S] suivant $n-p$ cercles.

Transportons l'origine des coordonnées au point

$$\left(x=0,\ y=0,\ z=\frac{c}{2}\right)$$

sans changer la direction des axes. L'équation de [S] devient

$$\text{(2)}\qquad F\left(x, y, \frac{x^2+y^2-ax-by}{x^2+y^2+z^2-ax-by-\dfrac{c^2}{4}}\right)=0.$$

Cette équation ne renfermant z qu'à des puissances paires, on en conclut que le nouveau plan des XY est plan de symétrie de la surface. De là il résulte que dans le mode de génération donné de la surface [S] on peut substituer respectivement au point P et à la courbe (C) leurs symétriques par rapport au plan de symétrie trouvé.

Supposons que la courbe (C) soit le cercle

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0;$$

la surface [S] est alors la surface du quatrième ordre qui faisait l'objet de la composition pour l'admission à l'École Polytechnique, et l'on retrouve, comme cas particuliers des remarques qui viennent d'être faites, les principales propriétés de cette surface.

L'équation (2) de [S] peut d'ailleurs s'écrire, dans ce cas spécial,

$$(x^2+y^2)\left(z^2-\frac{c^2}{4}\right)$$
$$+(x^2+y^2-ax-by)(x^2+y^2-\alpha x-\beta y)=0.$$

Cette équation n'est pas altérée par l'échange de a et de α, de b et de β. De là cette conséquence, assez digne de remarque, que la surface du quatrième ordre [S] peut être engendrée à l'aide de l'un des points $\left(\alpha, \beta, \pm\frac{c}{2}\right)$ et du cercle correspondant

$$z=\mp\frac{c}{2},\qquad x^2+y^2-ax-by=0,$$

de la même façon qu'au moyen de l'un des points $\left(a, b, \pm\frac{c}{2}\right)$ et du cercle correspondant

$$z = \mp\frac{c}{2}, \qquad x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0.$$