Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 285-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__285_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1798 et 1803.

(1898, p. 244 et 340; résolues 1900, p. 377; 1901, p. 473 et 474.)

Par un point m d'une conique on fait passer un cercle qui coupe cette courbe aux points a, b, c. Démontrer que, quel que soit ce cercle, la droite de Simson de m, par rapport au triangle a, b, c, passe par un point fixe.

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. MANNHEIM.

Pour arriver à cette propriété, transformons par polaires réciproques le théorème suivant :

Lorsqu'un triangle est circonscrit à une parabole P, *le cercle qui lui est circonscrit passe par le foyer f de* P.

Prenons un cercle directeur de centre m. La parabole P a pour polaire une conique E qui passe par m, le triangle circonscrit à P se transforme en un triangle inscrit dans E. Le cercle C a pour polaire une conique inscrite dans ce dernier triangle et qui a m pour foyer. Quel que soit le triangle inscrit dans E, les coniques, telles que celle-ci, sont tangentes à une même droite F polaire de f, par rapport au cercle directeur. Au lieu de parler de cette conique de foyer m et qui est tangente à quatre droites, introduisons le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées de m sur ces tangentes et nous avons cette propriété :

Les pieds des perpendiculaires, abaissées d'un point m d'une conique sur les côtés d'un triangle inscrit dans cette courbe, appartiennent à un cercle qui passe par un point fixe quel que soit le triangle.

Ce point fixe est le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur F : mais, par rapport à la parabole P, le foyer f est le pôle du lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette courbe, donc F, et le point g enveloppe des cordes de E vues de m sous un angle droit, sont polaire et pôle par rapport à E. Le point g est le point de Frégier pour le point m ; on peut donc dire : *Le point fixe de l'énoncé précédent est le pied de la perpendiculaire abaissée de m, sur la polaire, par rapport à* E, *du point de Frégier relatif à m.*

Prenons les symétriques m', m'' de m par rapport aux axes de E. Le point de Frégier g et le point p, où sa polaire rencontre $m'm''$, sont harmoniques conjugués par rapport à m', m''. Les droites mp, mm', mg, mm'' forment un faisceau harmonique, et comme l'angle $m''mm'$ est droit, les droites mp, mg sont également inclinées sur mm' ; mais mg est perpendiculaire à la tangente en m à E, donc mp est perpendiculaire à la tangente en m' à cette courbe. Ainsi la polaire de g passe par p et, puisqu'elle est parallèle à la tangente en m', le point p est le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur la polaire de g ; c'est donc le point fixe, et l'on peut ajouter : *Le point fixe est, sur le diamètre de* E *qui passe par le point de Frégier g relatif à m, l'harmonique conjugué de g par rapport aux extrémités de ce diamètre.*

Tout cela s'applique à la question 1798, qui n'est qu'un cas particulier de celle qui vient d'être traitée.

Par le point m menons la droite mn normale en n à E. Le cercle décrit sur mn comme diamètre coupe encore E en un point q. Ce point et les deux points de ce cercle confondus en n sont les sommets d'un triangle inscrit dans E pour lesquels la droite de Simson relative à m est la droite nq. Cette droite passe donc par le point fixe p. Mais nq et nm sont également inclinées sur les axes de E; on a donc cette propriété :

Une conique est donnée. On prend les normales à cette courbe issues de l'un de ses points. Pour chaque normale on mène de son pied la droite qui lui est symétrique par rapport aux axes de la conique : les quatre droites ainsi obtenues passent par un même point.

C'est l'énoncé de la question 1803.