A. VACQUANT

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1901). Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 265-280

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__265_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1901). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

1. L'équation générale des paraboloïdes P [1] qui sont elliptiques, puisque la section par le plan zOx est une ellipse, est de la forme

$$A''z^2+(\alpha x+\beta y)^2+2Cx=0.$$

La section par le plan zOx doit être l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{2x}{a}=0 \qquad \text{ou} \qquad b^2x^2+a^2z^2-2ab^2x=0.$$

Cette section étant la conique représentée par l'équation

$$\alpha^2x^2+A''z^2+2Cx=0,$$

on aura

$$\frac{\alpha^2}{b^2}=\frac{A''}{a^2}=\frac{C}{-ab^2},$$

d'où

$$\alpha^2=\frac{-C}{a}, \qquad A''=\frac{-Ca}{b^2},$$

et l'équation des paraboloïdes P s'écrit

$$-\frac{Ca}{b^2}z^2-\frac{C}{a}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}y\right)^2+2Cx=0$$

ou, en supprimant le facteur C et posant $\frac{\beta}{\alpha}=m$,

$$a^2z^2+b^2(x+my)^2-2ab^2x=0. \tag{1}$$

L'équation tangentielle des paraboloïdes P se déduit

[1] *Voir* l'énoncé dans le Tome précédent, p. 516.

de l'équation ponctuelle en développant un déterminant connu, ou encore, ce qui est aussi simple ici, en éliminant x, y, z entre les équations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{1}, \qquad ux - vy + wz + 1 = 0.$$

On a

$$\frac{b^2(x + my) - ab^2}{u}$$
$$= \frac{b^2 m(x + my)}{v} = \frac{a^2 z}{w} = \frac{-ab^2 x}{1} = \frac{-ab^2 m}{mu - v},$$

d'où

$$x = \frac{m}{mu - v}, \qquad z = \frac{-b^2 mw}{a(mu - v)},$$
$$x + my = \frac{-av}{mu - v}, \qquad y = \frac{-(av + m)}{m(mu - v)}.$$

L'équation tangentielle est donc

$$mu - \frac{v}{m}(av + m) - \frac{b^2}{a} mw^2 + mu - v = 0$$

ou

$$(1)' \qquad a^2 v^2 + b^2 m^2 w^2 - 2am^2 u + 2amv = 0.$$

2. Les focales demandées sont les coniques du faisceau

$$a^2 v^2 + b^2 m^2 w^2 - 2am^2 ur + 2amvr + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

ou

$$\lambda u^2 + (a^2 + \lambda) v^2 + (b^2 m^2 + \lambda) w^2 - 2am^2 ur + 2amvr = 0.$$

L'équation en λ, qui les donne, s'obtient en égalant à zéro le discriminant de cette équation homogène en u, v, w, r.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -am^2 \\ 0 & a^2 + \lambda & 0 & am \\ 0 & 0 & b^2 m^2 + \lambda & 0 \\ -am^2 & am & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$-\lambda a^2 m^2 (b^2 m^2 + \lambda) - a^2 m^4 (a^2 + \lambda)(b^2 m^2 + \lambda) = 0,$$

d'où

$$b^2 m^2 + \lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -b^2 m^2$$

et

$$m^2 (a^2 + \lambda) + \lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -\frac{a^2 m^2}{1 + m^2}.$$

Par suite, les équations tangentielles des focales sont :

$$-b^2 m^2 u^2 + (a^2 - b^2 m^2) v^2 - 2am^2 ur + 2amvr = 0$$

ou

$$(\mathrm{F}) \quad b^2 m^2 u^2 + (b^2 m^2 - a^2) v^2 + 2am^2 ur - 2amvr = 0$$

et

$$\begin{aligned} -a^2 m^2 u^2 + a^2 v^2 + [b^2 m^2 (1 - m^2) - a^2 m^2] w^2 \\ - 2am^2(1 + m^2) ur + 2am(1 + m^2) vr = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(\Phi) \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2 m^2 u^2 - a^2 v^2 + (a^2 - b^2 - b^2 m^2) m^2 w^2 \\ & \quad + 2am^2(1 + m^2) ur - 2am(1 + m^2) vr = 0. \end{aligned} \right.$$

La parabole F est située dans le plan des xOy ; c'est l'enveloppe du plan

$$ux + vy + rt = 0.$$

La parabole Φ, qui a même axe que F, est située dans un plan perpendiculaire à xOy ; on trouve les coordonnées de ce plan en résolvant les équations

$$\frac{1}{2}\Phi'_u = 0, \qquad \frac{1}{2}\Phi'_v = 0, \qquad \frac{1}{2}\Phi'_w = 0, \qquad \frac{1}{2}\Phi'_r = 0;$$

mais il est plus simple de remarquer que l'axe commun des paraboles F et Φ est aussi l'axe de la parabole

$$(x + my)^2 - 2ax = 0,$$

section du paraboloïde P par le plan xOy.

Les cordes perpendiculaires à l'axe de cette parabole ayant pour coefficient angulaire m, l'axe a pour équation

$$x + my - a + m(x + my)m = 0$$

ou

$$(1 + m^2)(x + my) - a = 0;$$

c'est aussi l'équation du plan de la focale Φ.

Les équations tangentielles du cône ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour directrice Φ sont :

$$r = 0,$$

$$a^2 m^2 u^2 - a^2 v^2 + (c^2 - b^2 m^2) m^2 w^2 = 0.$$

L'équation ponctuelle de ce cône est

$$\frac{x^2}{a^2 m^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{m^2(c^2 - b^2 m^2)} = 0$$

ou

$$(c^2 - b^2 m^2)(x^2 - m^2 y^2) + a^2 z^2 = 0.$$

On peut dire que les équations ponctuelles de la focale Φ sont :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} (1 + m^2)(x - my) - a &= 0, \\ (c^2 - b^2 m^2)(x^2 - m^2 y^2) + a^2 z^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

3. L'équation tangentielle de F s'écrit

$$(\mathrm{F}) \qquad (b^2 u^2 + b^2 v^2 + 2aur) m^2 - 2avrm - a^2 v^2 = 0.$$

Son enveloppe, quand m varie, a pour équation tangentielle

$$a^2 v^2 r^2 + a^2 v^2 (b^2 u^2 + b^2 v^2 + 2aur) = 0$$

ou

$$(3) \qquad b^2(u^2 + v^2) + r(2au + r) = 0,$$

c'est-à-dire une conique ayant pour foyers les extrémités du grand axe de l'ellipse donnée. Pour trouver les sommets de cette conique située sur Ox, faisons $v = 0$ dans l'équation précédente, ce qui donne

$$b^2 u^2 + 2aur + r^2 = 0.$$

En remplaçant u par $-\frac{1}{x}$ et r par 1, on a l'équation

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

définissant les abscisses des sommets, savoir $x = a \pm c$, foyers de l'ellipse donnée E. Ainsi l'enveloppe de la focale F se compose déjà de l'hyperbole H, focale de l'ellipse E. Il faut observer, en outre, que l'équation de F est satisfaite, quel que soit m, si l'on a

$$v = 0,$$
$$b^2 u^2 + b^2 v^2 + 2aur = 0$$

ou

$$v = 0,$$
$$u(b^2 u + 2ar) = 0,$$

et par suite

$$v = 0, \qquad u = 0, \qquad r \neq 0,$$
$$v = 0, \qquad u = -\frac{2a}{b^2}, \qquad r = 1,$$

ce qui montre que la parabole F est tangente à la droite de l'infini, résultat bien connu, et à la droite Δ du plan xOy, représentée par l'équation

$$x = \frac{b^2}{2a}.$$

Le pôle de Oy, par rapport à H, est un point O_1 de Ox ayant pour abscisse $\frac{b^2}{a}$; la droite Δ est donc la perpendiculaire au milieu de OO_1.

En retranchant membre à membre les équations (F) et (3) multipliée par m^2, on obtient

$$(mr + av)^2 = 0.$$

ce qui prouve que F et H sont bitangentes, le pôle P_1 de la corde des contacts ayant pour équation

$$av + mr = 0.$$

Quand m varie, le point P_1 décrit Oy; par suite la corde des contacts passe par un point fixe O_1, pôle de Oy par rapport à H; mais le pôle de Oy par rapport à une parabole F est aussi O_1; la parallèle à Oy menée par le milieu de OO_1 est une droite fixe tangente à F; on retrouve ainsi la droite Δ. (Cette remarque géométrique m'a été communiquée, sous une autre forme, par M. E. Duporcq.)

Ainsi, en faisant abstraction de la droite de l'infini, l'enveloppe de la focale F se compose de l'hyperbole H, focale de E, et de la droite Δ.

4. L'axe de Φ a pour équation, d'après ce qui précède,

$$(1 + m^2)(x + my) - a = 0.$$

Ses coordonnées sont :

$$u = \frac{1 + m^2}{-a}, \qquad v = \frac{m(1 + m^2)}{-a}.$$

En éliminant m entre ces équations, on obtient l'équation tangentielle de l'enveloppe de l'axe de Φ

$$1 + \frac{v^2}{u^2} + au = 0$$

ou

$$au^3 + u^2 + v^2 = 0.$$

On reconnait l'équation tangentielle d'une hypocycloïde à trois rebroussements ayant pour axe Ox.

En coordonnées ponctuelles, l'hypocycloïde est définie par les équations

$$x + my - \frac{a}{1+m^2} = 0,$$

$$y + \frac{2am}{(1+m^2)^2} = 0,$$

ou

$$x = \frac{a}{1+m^2} + \frac{2am^2}{(1-m^2)^2} = \frac{a(1+3m^2)}{(1+m^2)^2},$$

$$y = \frac{-2am}{(1+m^2)^2},$$

formules qui représentent une courbe unicursale du quatrième ordre.

On trouve aisément, en dérivant,

$$x'_m = \frac{2am(1-3m^2)}{(1+m^2)^3},$$

$$y'_m = \frac{-2a(1-3m^2)}{(1+m^2)^3},$$

$$y'_x = \frac{y'_m}{x'_m} = -\frac{1}{m}.$$

Il suffit de faire croître m de 0 à $+\infty$ pour obtenir la moitié de la courbe qui admet Ox pour axe de symétrie. Les points de rebroussement sont donnés par les trois valeurs de m qui rendent indéterminées les valeurs de x'_m et y'_m, savoir $m = \infty$ et $m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour $m = \infty$,

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y'_x = 0, \qquad \text{point O},$$

pour $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

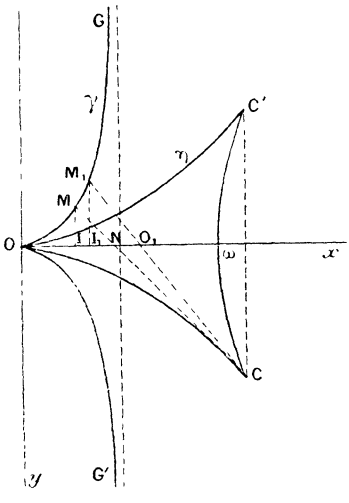
$$x = \frac{9a}{8}, \qquad y = -\frac{9a}{8\sqrt{3}}, \qquad y'_x = -\sqrt{3}, \qquad \text{point C}',$$

pour $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$x = \frac{9a}{8}, \qquad y = \frac{9a}{8\sqrt{3}}, \qquad y'_x = \sqrt{3}, \qquad \text{point C.}$$

Quand m croît de o à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, x croît de a à $\frac{9a}{8}$ et y décroît de o à $-\frac{9a}{8\sqrt{3}}$; m croissant de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ à $+\infty$, x décroît de $\frac{9a}{8}$ à o, et y croît de $-\frac{9a}{8\sqrt{3}}$ à O. Ainsi m croissant de o à $+\infty$, on a la moitié de la courbe ωC′O; par symétrie, on a l'autre moitié ωCO (*fig.* 1).

Fig. 1.



Un plan perpendiculaire à l'axe de Φ a une équation de la forme

$$mx - y + r = 0.$$

Il sera tangent au sommet de Φ si ses coordonnées homogènes m, -1, o, r satisfont à l'équation (Φ), ce qui donne

$$a^2 m^4 - a^2 + 2am(1+m^2)^2 r = 0$$

ou

$$r = \frac{a(1-m^2)}{2m(1+m^2)},$$

de sorte que le sommet de Φ est défini par les équations

$$x + my - \frac{a}{1+m^2} = 0,$$

$$mx - y + \frac{a(1-m^2)}{2m(1+m^2)} = 0.$$

En les résolvant par rapport à x et y, on obtient

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{2(1+m^2)}, \\ y &= \frac{a}{2m(1+m^2)}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations représentent une cubique unicursale, d'axe Ox, ayant un point de rebroussement à l'origine et une asymptote $x - \frac{a}{2} = 0$ correspondant à la valeur O du paramètre m. Cette cubique est une cissoïde (*fig.* 1) dont le cercle directeur a pour diamètre $\frac{a}{2}$; son équation ponctuelle est

$$2x - \frac{a}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2x(x^2+y^2) - ay^2 = 0$$

ou

$$y = \pm x \sqrt{\frac{2x}{a-2x}}.$$

5. Les paraboles F et Φ, focales l'une de l'autre, sont telles que le sommet de l'une coïncide avec le foyer de l'autre, et inversement; par suite, le demi-paramètre de la focale Φ est égal à la distance des sommets de F

et Φ. D'après ce qui précède, le plan tangent au sommet de Φ et perpendiculaire à son axe a pour équation

$$mx - y + \frac{a(1-m^2)}{2m(1+m^2)} = 0$$

De même, à l'aide de l'équation (F), on obtient

$$mx - y + \frac{a^2 - b^2 m^2(1+m^2)}{2am(1+m^2)} = 0$$

pour l'équation du plan tangent au sommet de F et perpendiculaire à l'axe commun de F et Φ. La distance de ces deux plans représente, en valeur absolue, le demi-paramètre $\frac{p}{2}$ de la parabole Φ; donc

$$\left|\frac{p}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{a^2 - b^2 m^2(1+m^2)}{2am(1+m^2)} - \frac{a(1-m^2)}{2m(1+m^2)}\right],$$

$$\left|\frac{p}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{a^2 m^2 - b^2 m^2(1+m^2)}{2am(1+m^2)}\right].$$

D'où, en élevant au carré,

$$p^2 = \frac{[a^2 - b^2(1+m^2)]^2 m^2}{a^2(1+m^2)^3}.$$

Le coefficient angulaire λ de l'axe de la parabole Φ est $-\frac{1}{m}$; alors $m = -\frac{1}{\lambda}$, et l'expression de p^2 s'écrit

$$p^2 = \frac{[a^2\lambda^2 - b^2(1+\lambda^2)]^2}{a^2(1+\lambda^2)^3}$$

ou

(5) $$p^2 = \frac{a^2}{1+\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} - \frac{b^2}{a^2}\right)^2$$

ou, en posant

$$\lambda = \operatorname{tang}\omega,$$

$$p^2 = a^2\cos^2\omega\left(\sin^2\omega - \frac{b^2}{a^2}\right)^2 = a^2\cos^2\omega\left(\frac{c^2}{a^2} - \cos^2\omega\right)^2.$$

par suite

$$|p| = a \cos\omega \left(\frac{c^2}{a^2} - \cos^2\omega\right).$$

La dérivée de p, par rapport à ω, est, en valeur absolue,

$$|p'_\omega| = -a \sin\omega \left(\frac{c^2}{a^2} - \cos^2\omega\right) + 2a \cos^2\omega \sin\omega,$$

$$|p'_\omega| = \quad a \sin\omega \left(3\cos^2\omega - \frac{c^2}{a^2}\right).$$

Adoptons la formule

$$p = a \cos\omega \left(\frac{c^2}{a^2} - \cos^2\omega\right)$$

et faisons croître ω de o à $\frac{\pi}{2}$. La dérivée s'annule en changeant de signe pour $\omega = 0$ et $\cos\omega = \frac{c}{a\sqrt{3}}$ ou $\omega = \beta$. Pour $\omega = 0$ on a le minimum

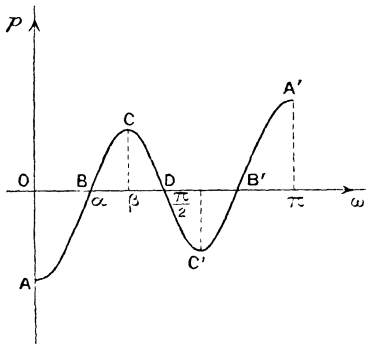
$$p = -\frac{b^2}{a},$$

pour $\omega = \beta$ on a le maximum

$$p = \frac{c}{\sqrt{3}}\left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{3a^2}\right) = \frac{2c^3}{3a^2\sqrt{3}}.$$

La valeur de p est nulle pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ et pour $\cos\omega = \frac{c}{a}$ ou $\omega = \alpha$ avec $\alpha < \beta$. D'où la courbe représentant les variations de p quand ω croît de o à $\frac{\pi}{2}$. On remarque ensuite que, pour les valeurs supplémentaires de ω égales à $\frac{\pi}{2} - \omega_1$ et $\frac{\pi}{2} + \omega_1$, p prend des valeurs égales et de signes contraires. D'où la courbe DC'B'A' symétrique de ABCD par rapport au point D, représentant les variations de p quand ω croît de $\frac{\pi}{2}$ à π (*fig.* 2).

Fig. 2.



D'ailleurs il suffit de faire varier ω de o à π pour obtenir toutes les valeurs du coefficient angulaire λ et, par suite, de p.

6. La surface Σ engendrée par la focale Φ est définie par les équations (2) de cette focale dans lesquelles on regardera m comme variable, c'est-à-dire par les équations

$$(\Sigma)\qquad \begin{cases} x + my - \dfrac{a}{1 + m^2} = 0, \\ (c^2 - b^2 m^2)(x^2 - m^2 y^2) + a^2 z^2 = 0, \end{cases}$$

qu'on peut écrire

$$x + my = \frac{a}{1 + m^2},$$

$$x - my = \frac{-a(1 + m^2) z^2}{c^2 - b^2 m^2}.$$

En résolvant ces équations par rapport à x et y, on obtient

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a[c^2 - b^2 m^2 - (1 + m^2)^2 z^2]}{2(1 + m^2)(c^2 - b^2 m^2)}, \\ y = \dfrac{a[c^2 - b^2 m^2 + (1 + m^2)^2 z^2]}{2m(1 + m^2)(c^2 - b^2 m^2)}. \end{cases}$$

On voit que Σ est une surface unicursale admettant pour plan de symétrie xOy et zOx. La relation entre m et z définissant la section de Σ par le plan zOx s'obtient en faisant $y = 0$ dans les équations (6) [ou (Σ)]. Cette relation se décompose en

$$m = \infty \qquad \text{et} \qquad c^2 - b^2 m^2 + (1 + m^2)^2 z^2 = 0.$$

De la première on déduit, en faisant $m = \infty$ dans l'expression de x,

$$x = \frac{-az^2}{-2b^2}$$

ou

$$(\Phi_1)\qquad z^2 - \frac{2b^2}{a} x = 0;$$

c'est l'équation de la focale Φ située dans le plan zOx; ce résultat pouvait se trouver directement en remarquant que l'on connaît les coordonnées du sommet de Φ et l'expression de son paramètre en fonction de m; en y faisant $m = \infty$ on obtient pour sommet l'origine O et pour paramètre $\frac{b^2}{a}$, c'est-à-dire la parabole $z^2 - \frac{2b^2}{a} x = 0$ du plan zOx. On obtient le reste de la section par le plan zOx en éliminant m entre les équations

$$c^2 - b^2 m^2 + (1 + m^2)^2 z^2 = 0,$$

$$x = \frac{a[c^2 - b^2 m^2 - (1 + m^2)^2 z^2]}{2(1 + m^2)(c^2 - b^2 m^2)},$$

d'où

$$x = \frac{a}{1 + m^2}, \qquad m^2 = \frac{a}{x} - 1,$$

$$c^2 - b^2\left(\frac{a}{x} - 1\right) + \frac{a^2}{x^2} z^2 = 0, \qquad a^2 - \frac{ab^2}{x} + \frac{a^2}{x^2} z^2 = 0$$

ou

$$(C_1) \qquad a(x^2+z^2)-b^2x=0,$$

équation d'un cercle C_1 tangent au sommet O de l'ellipse E ayant pour diamètre $OO_1=\frac{b^2}{a}$.

La section de Σ par le plan zOx se compose donc de la parabole Φ_1 et du cercle C_1.

Maintenant pour avoir une idée de la surface engendrée par la focale Φ nous nous servirons de la cissoïde γ, lieu de son sommet, de l'hypocycloïde η enveloppe de son axe, de son paramètre p et du cercle C_1. Nous représentons sur une même figure γ et η.

Si l'on considère un point M de la demi-cissoïde OG, la droite OM a pour équation $\frac{y}{x}=\frac{1}{m}$; l'axe MT de la focale Φ ayant son sommet en M est une tangente à η et a pour direction $y=-\frac{1}{m}x$; elle coupe donc Ox en un point N tel que le triangle OMN est isoscèle. Tant que le point N sera compris entre O et O_1, le foyer φ de la parabole Φ sera sur la direction MN, car Φ et C_1 se coupent. On a

$$OO_1=\frac{b^2}{a}<b<a,$$

et le milieu de OO_1, soit I_1, est tel que $OI_1<\frac{a}{2}$; alors le point M_1 de γ, d'abscisse OI_1, est tel que la focale Φ correspondante se réduit à une droite double du plan xOy; en effet

$$OO_1=\frac{b^2}{a}=\frac{a}{1+m^2},$$

d'où

$$m^2=\frac{a^2}{b^2}-1=\frac{c^2}{b^2}, \qquad \tang^2\omega=\lambda^2=\frac{1}{m^2}=\frac{b^2}{c^2},$$

$$\cos^2\omega=\frac{c^2}{a^2};$$

$\omega = \alpha$, $p = 0$, et le paramètre change de signe; cela signifie que pour $\omega > \alpha$ le foyer de Φ se trouve sur la direction opposée à MN; la concavité de la parabole Φ change donc de sens, par rapport à la direction MN, quand cette parabole devient une droite double M_1O_1 de coefficient angulaire $\frac{b}{c}$.

Quand le point mobile M arrive à l'infini vers G, $\lambda = +\infty$, $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Il est maintenant facile de suivre le mouvement et la déformation de la parabole Φ.

Quand ω croît de 0 à α, p décroît de $\frac{b^2}{a}$ à 0, et la concavité de Φ est dirigée suivant MN; quand ω croît de α à β, p croît de 0 à $\frac{2c^3}{3a^2\sqrt{3}}$; puis p décroît de $\frac{2c^3}{3a^2\sqrt{3}}$ à 0 quand ω croît de β à $\frac{\pi}{2}$; de plus, de $\omega = \alpha$ à $\omega = \frac{\pi}{2}$ la concavité de Φ est dirigée dans le sens contraire à MN.

Ensuite, quand ω croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, le point M se déplace sur la demi-cissoïde G′O de G′ vers O; on a les mêmes résultats en sens inverse; ce qui se voit d'ailleurs immédiatement en remarquant que zOx est un plan de symétrie pour Σ.

C'est géométriquement, à l'aide du cercle C_1, que nous avons précisé le sens de la concavité de Φ. On peut établir le même résultat analytiquement en calculant les coordonnées (x_0, y_0) de φ, c'est-à-dire du sommet de F. On trouve aisément (d'après 5)

$$x_0 = \frac{a^2 + b^2m^2(1 - m^2)}{2a(1 + m^2)^2}.$$

D'autre part, pour le point $M(x, y)$, on a trouvé

$$x = \frac{a}{2(1 - m^2)},$$

par suite

$$x - x_0 = \frac{a^2(1+m^2) - a^2 - b^2 m^2(1+m^2)}{2a(1+m^2)^2} = \frac{m^2(c^2 - b^2 m^2)}{2a(1+m^2)^2}.$$

La différence $x - x_0$ s'annule pour $m^2 = \frac{c^2}{b^2}$ $(\omega = \alpha)$; elle est négative pour $m^2 > \frac{c^2}{b^2}$ ou $\lambda^2 < \frac{b^2}{c^2}$ ou $\omega < \alpha$ et positive pour $\omega > \alpha$, en considérant seulement l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pour ω, ce qui est suffisant. Donc, quand le point M se déplace sur γ de O en M_1, le foyer φ de Φ est sur la direction MN; quand il se déplace de M_1 vers G, φ est sur la direction opposée à MN.