

V. HIOUX

**Nouvelle démonstration du théorème
de Feuerbach**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 254-256

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2_254_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K2c]

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. V. HIOUX.

En associant, au cercle inscrit dans un triangle ABC, un quelconque des trois cercles ex-inscrits, le théorème de Feuerbach peut être démontré comme il suit :

1° Soit S le point de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle A et du côté BC; si du point S on mène la seconde tangente au cercle inscrit, elle sera parallèle à la tangente AT en A au cercle circonscrit.

En effet, dans l'angle ATB, à cause de

$$TB \times TC = TA^2,$$

les droites AB et AC sont antiparallèles, d'où résulte l'égalité des angles TAS et AST, puisque chacun d'eux est égal à $\left(B + \frac{A}{2}\right)$.

Soit ST' la seconde tangente au cercle O menée de S : elle est symétrique de la première ST par rapport à SA et l'on a

$$\widehat{T'SA} = \widehat{TAS}.$$

Les deux droites AT et ST' font donc avec AS des angles alternes-internes égaux et sont donc parallèles.

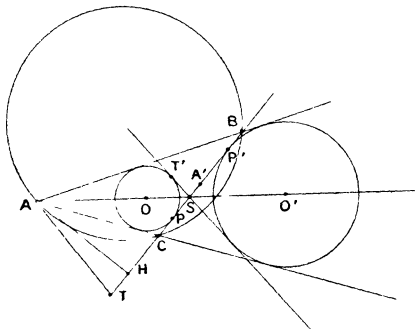
2° Au cercle inscrit O associons le cercle O', ex-inscrit dans l'angle A, et menons la perpendiculaire AH à BC.

Sur la droite AS les centres O et O' et les centres de

similitude A et S des cercles O et O' forment une division harmonique; il en est par suite de même de leurs projections sur le côté BC . Ainsi P' , P , S et H forment une division harmonique. On voit que le milieu A' de BC est aussi le milieu du segment PP' et l'on a donc la relation

$$A'S \times A'H = A'\bar{P}^2.$$

Le cercle des neuf points du triangle ABC passe par A' et par H . Si, par conséquent, en prenant A' pour origine et $A'\bar{P}^2$ pour puissance d'inversion, on forme la figure inverse des cercles O et O' et du cercle des



neuf points, les deux premiers se transforment en eux-mêmes, puisque $A'P$ est tangente au premier et

$$A'P' = A'P,$$

tangente au second. Quant au cercle des neuf points, il a pour inverse une droite passant par S ; cette droite est parallèle à la tangente en A' à ce cercle. Mais cette tangente est parallèle à AT , puisque A et A' sont les sommets homologues de deux triangles homothétiques.

(256)

La droite en question coïncide par conséquent avec la seconde tangente commune $T'S$ aux cercles O et O' .

Donc le cercle des neuf points est tangent à chacun des cercles O et O' .

Les points de contact se déterminent facilement.