NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST DUPORCQ

Sur les transformations de contact dans le plan

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 247-253

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__247_1>

[P6e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT DANS LE PLAN;

Par M. Ernest DUPORCQ.

Le but de cette Note n'est pas d'exposer des résultats originaux, mais de montrer comment la notion des transformations de contact mérite, par suite de sa portée et de sa simplicité, d'être introduite dans l'enseignement de la Géométrie analytique. Nous nous bornerons, pour simplifier, au cas du plan.

1. Soit, en coordonnées cartésiennes,

$$(1) \qquad f(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

l'équation d'une courbe A dépendant de deux paramètres α, β. Ceux-ci peuvent être considérés comme les coordonnées d'un point a, de sorte qu'à tout point a du plan correspond ainsi une courbe A. Si a décrit une courbe (a), A aura une enveloppe (A), dont l'équation s'obtiendrait en éliminant α et β entre l'équation (1), l'équation

$$(2) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

de la courbe A, et enfin la relation

$$(3) \qquad \frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta}.$$

La courbe représentée par l'équation (3) coupe la courbe A aux points où celle-ci touche son enveloppe. Or cette équation (3) n'est pas modifiée si l'on remplace la courbe (a) par une autre la touchant au point a, car φ'_α et φ'_β varient alors proportionnellement. La courbe A continuera donc à toucher son enveloppe aux mêmes points; par suite, les diverses courbes (A), qui correspondent à des courbes (a) tangentes entre elles au point a, se toucheront entre elles aux points où elles touchent la courbe A.

En résumé, la transformation qui associe les courbes (A) aux courbes (a) conserve les contacts : c'est une *transformation de contact*. On la définit en faisant correspondre une courbe à tout point du plan, d'une manière quelconque.

2. On peut interpréter autrement les équations précédentes. Considérons x, y comme les coordonnées d'un point fixe b et α, β comme des coordonnées courantes : l'équation

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0 \tag{1}$$

représente alors une courbe B, et, en éliminant α, β entre les équations (1), (2) et (3), on exprime que B touche la courbe (a) définie par l'équation (2). La transformation de contact qui, à tout point b, associe la courbe B est la transformation *inverse* de la précédente, et la courbe (A) peut encore être définie comme le lieu des points b tels que les courbes B correspondantes touchent la courbe (a).

3. On peut encore définir une transformation de contact en partant de deux équations arbitraires

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

dépendant chacune des deux paramètres α et β. Pour chaque couple de valeurs de α, β on a les équations de deux courbes A et B, correspondantes. On a bien ainsi une transformation de contact : considérons, en effet, α et β comme les coordonnées d'un point m, la transformation $[A, m]$, qui associe le point m à la courbe A, est une transformation de contact, d'après le précédent paragraphe; et il en est de même de la transformation $[m, B]$, en vertu du premier paragraphe. La transformation $[A, B]$ s'obtient donc comme le produit de deux transformations de contact : elle est donc visiblement aussi de contact. En résumé :

On peut définir une transformation de contact dans le plan, en associant deux à deux des courbes dépendant chacune de deux paramètres.

4. On peut généraliser encore. Considérons maintenant deux courbes, A_1 et A_2, définies par les équations

$$f_1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$f_2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

dépendant de trois paramètres : à chaque couple ainsi obtenu faisons correspondre une courbe B, dont l'équation

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

contient les mêmes paramètres.

Assujettissons maintenant les courbes A_1 et A_2 à toucher respectivement deux courbes fixes (A_1) et (A_2), ce qui revient à lier les paramètres α, β, γ par deux relations. Les courbes B auront une enveloppe (B).

Soient A_1^0, A_2^0, B^0 trois positions correspondantes des courbes A_1, A_2 et B. Nous allons voir que, si l'on remplace (A_1) et (A_2) par deux autres courbes touchant respectivement aux mêmes points les courbes A_1^0 et A_2^0, la courbe (B) sera remplacée par une autre qui touchera aussi B^0 aux mêmes points. Il suffit évidemment, pour cela, de voir qu'il en est bien ainsi si l'on modifie seulement la courbe (A_1) : or, dans ce cas, puisque A_2 doit toucher (A_2), les paramètres α, β, γ sont déjà liés par une relation fixe, de sorte que A_1 et B ne dépendent plus que de deux paramètres. On se trouve donc ramené au cas du paragraphe précédent.

5. Le raisonnement qui précède pourrait évidemment s'étendre au cas où l'on considérerait n courbes dépendant de n paramètres arbitraires. On verrait alors que :

Un ensemble de n courbes dépendant de n paramètres, si l'on assujettit $(n-1)$ *d'entre elles à toucher des courbes fixes, la* $n^{ième}$ *touchera son enveloppe en des points qui ne dépendront que des points de contact des* $(n-1)$ *autres.*

Rien n'empêche, évidemment, de supposer qu'un certain nombre des n courbes envisagées soient confondues : si, par exemple, p d'entre elles sont confondues en une seule courbe, il suffira d'assujettir celle-ci à toucher p courbes fixes. Remarquons d'ailleurs que certaines courbes peuvent être des cercles de rayon nul : on assujettit alors des points à décrire des courbes fixes.

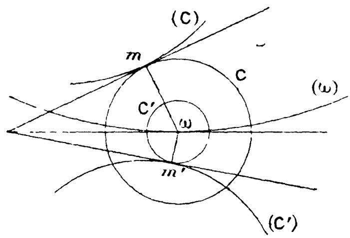
6. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la transformation du n° 1, à laquelle peut évidemment être ramenée toute transformation des contacts, conserve l'*ordre des contacts*. Il sera facile d'en déduire la généralisation de tous les résultats précédents, en tenant compte de l'ordre des contacts.

7. Nous terminerons par quelques applications : la première nous fournira, relativement aux anticaustiques par réfraction, des résultats bien connus, mais qui sont loin d'être aussi intuitifs que certains Ouvrages de Physique semblent l'admettre.

A cet effet, considérons, comme ensemble de trois courbes dépendant de trois paramètres, trois cercles concentriques, ω, C et C', le premier ayant un rayon nul, et les autres des rayons r et r' tels que

$$r' = \mathrm{K}r \qquad (\mathrm{K}\ \text{const.}).$$

Si le point ω décrit une courbe (ω) et si le cercle C a une enveloppe (C), le cercle C' aura une enveloppe (C'); d'après ce que nous avons dit au n° 4, les points m' où C' touchera cette enveloppe ne dépendront que de la tangente en ω à la courbe (ω) et de la tangente à (C) au point m où cette enveloppe touche C. Or, si l'on rem-



place (ω) et (C) par leurs tangentes en ω et en m, l'enveloppe de C' est évidemment une droite passant par le point commun à ces tangentes. On obtient ainsi le point m', et l'on retombe sur la construction d'Huygens, qui se trouve ainsi établie, dans la théorie des ondulations, pour le cas général où la courbe dirimante et l'onde incidente ne sont pas des droites, cas auquel on se borne généralement pour démontrer la construction du rayon réfracté, que l'on étend ensuite, sans en montrer la raison, au cas général, comme si l'on admettait l'existence effective des rayons lumineux.

8. Comme seconde application considérons, plus généralement, n cercles concentriques, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, dont les rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont liés par une relation

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0.$$

L'ensemble de ces n cercles dépend de $n+1$ paramètres. En leur adjoignant leur centre commun ω (cercle de rayon nul), on a bien $n+1$ courbes dépendant de $n+1$ paramètres. Si les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ touchent des courbes données $(C_1), (C_2), \ldots, (C_n)$, le point ω décrit le lieu des points dont les distances normales à ces courbes sont liées par la relation donnée : la tangente à ce lieu ne sera pas modifiée si l'on remplace les courbes $(C_1), (C_2), \ldots$ par leurs tangentes aux points de contact. Soit

$$D_i = x \cos\varphi_i + y \sin\varphi_i - p_i = 0$$

l'équation d'une de ces tangentes; le lieu de ω est alors

$$f(D_1, D_2, \ldots, D_n) = 0;$$

les paramètres directeurs de la normale en ω sont donc

$$\sum_1^n \cos\varphi_i . f'_{D_i}$$

et

$$\sum_1^n \sin\varphi_i f'_{D_i}.$$

On voit ainsi que la direction de la normale est bien la résultante de vecteurs portés sur les n normales aux courbes (C_i), issues de ω, ces vecteurs étant respectivement proportionnels aux n dérivées partielles de la fonction $f(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Ce résultat est d'ailleurs bien connu.

On pourrait multiplier les applications de ce genre : nous espérons avoir fait suffisamment apparaître la fécondité de la méthode.