NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 232-238

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__232_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1893.

(1900, p. 574.)

On donne une parabole P *représentée par* $y^2 - 2px = 0$; *on considère les paraboles* Q *qui touchent* XO *en* O *et dont les directrices sont tangentes à* P.

1° *Former l'équation générale des paraboles* Q, *démontrer que par chaque point du plan il passe trois de ces paraboles, déterminer la région où sont situés les points tels que deux des trois paraboles qui y passent soient confondues;*

2° *Former l'équation de l'axe d'une parabole* Q, *en déduire qu'il passe trois axes par chaque point du plan, trouver le lieu des points tels que deux axes correspondants soient rectangulaires;*

---

(1) *Nouvelles Annales*, 4e série, t. II, p. 48 et 240.

3° *Trouver le lieu des foyers des paraboles* Q;

4° *Former l'enveloppe des tangentes au sommet.*

(CH. BIOCHE.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

1. Soient

F le foyer d'une parabole Q;
F' le symétrique de F par rapport à OX;
α et β les coordonnées de F;
θ l'angle de l'axe de Q avec OX;
$OF = OF' = q$.

L'équation de la directrice de Q est

$$(1) \qquad x\cos\theta + y\sin\theta + q = 0.$$

Les coordonnées de F sont

$$(2) \qquad \alpha = -q\cos\theta, \qquad \beta = q\sin\theta.$$

De sorte que l'équation générale des paraboles tangentes en O à OX est

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta + q)^2$$

ou

$$(x + q\cos\theta)^2 + (y - q\sin\theta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta + q)^2,$$

qui se réduit à

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 - 4qy\sin\theta = 0.$$

Reste à exprimer que la droite (1) est tangente à la parabole $y^2 - 2px = 0$.

En portant $x = \dfrac{y^2}{2p}$ dans (1), on a

$$y^2\cos\theta + 2py\sin\theta + 2pq = 0.$$

Cette équation en y aura ses racines égales pour

$$q = \frac{p\sin^2\theta}{2\cos\theta};$$

par conséquent l'équation générale des paraboles Q est, en fonction du paramètre variable θ.

$$(3) \qquad (x \sin\theta - y\cos\theta)^2 - \frac{2py\sin^3\theta}{\cos\theta} = 0.$$

En posant $\operatorname{tang}\theta = m$, et ordonnant par rapport à m, cette équation devient

$$(4) \qquad 2pym^3 - m^2x^2 + 2mxy - y^2 = 0.$$

Cette équation en m est du troisième degré : il passe donc, par chaque point (x, y) du plan, trois paraboles Q. Si deux de ces paraboles sont confondues, c'est que l'équation (4) a une racine commune avec sa dérivée par rapport à m, c'est-à-dire

$$(5) \qquad 3pym^2 - mx^2 + xy = 0.$$

En multipliant (5) par $2m$ et en retranchant (4) multipliée par 3, on a

$$(6) \qquad m^2x^2 - 4mxy + 3y^2 = 0.$$

On est donc ramené à éliminer m entre (5) et (6), ce qui donne

$$y^2[(x^3 - 9py^2)^2 - x^2(x^4 - 12pxy^2)] = 0$$

ou

$$y^4(27py^2 - 2x^3) = 0.$$

Le lieu cherché est donc la *parabole semi-cubique*

$$(7) \qquad y^2 = \frac{2x^3}{27p},$$

qui est la *développée de la parabole*

$$y^2 = 8p(x + 4p).$$

La courbe (7) est aussi l'enveloppe de la parabole (3)

2. L'équation de l'axe de la parabole Q est

$$y - \beta = (x - \alpha)\operatorname{tang}\theta$$

ou

$$(y - q\sin\theta)\cos\theta = (x + q\cos\theta)\sin\theta.$$

$$x\sin\theta - y\cos\theta + 2q\sin\theta\cos\theta = 0.$$

ou enfin

$$(8)\qquad x\sin\theta - y\cos\theta + p\sin^3\theta = 0.$$

En posant $\tang\theta = m$, cette équation devient

$$(9)\qquad (x+p)m^3 - ym^2 + xm - y = 0.$$

Donc, par un point (x, y) du plan il passe trois axes dont les coefficients angulaires m_1, m_2, m_3 satisfont à l'équation (9). Par conséquent

$$(10)\qquad m_1 + m_2 + m_3 = \frac{y}{x+p},$$

$$(11)\qquad m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 = \frac{x}{x+p},$$

$$(12)\qquad m_1 m_2 m_3 = \frac{y}{x+p}.$$

Si deux des axes sont rectangulaires, on a en outre

$$(13)\qquad m_2 m_3 = -1.$$

Il faut donc éliminer m_1, m_2, m_3 entre les équations (10), (11), (12) et (13); (12) donne

$$(14)\qquad m_1 = -\frac{y}{x+p}.$$

(10) et (11) deviennent, en tenant compte de (13) et (14),

$$m_2 + m_3 = \frac{2y}{x+p},$$

$$m_2 + m_3 = -\frac{(2x+p)}{y}.$$

De sorte que, en égalant ces deux valeurs de $(m_2 + m_3)$, on obtient, pour l'équation du lieu tel que deux axes soient rectangulaires,

$$(2x+p)(x+p) + 2y^2 = 0,$$
$$2(x^2+y^2) + 3px + p^2 = 0.$$

Ce lieu est donc le *cercle*

$$(15)\qquad \left(x + \frac{3p}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{16}.$$

3. Les coordonnées de F s'écrivent

$$\alpha = -\frac{p \sin^2\theta}{2}, \qquad \beta = \frac{p \sin^3\theta}{2\cos\theta}. \tag{16}$$

L'élimination de θ entre ces deux équations donne

$$\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{p\beta^2}{2} = 0. \tag{17}$$

C'est une *cissoïde droite* ayant son point de rebroussement en O, et pour asymptote la directrice de la parabole P. L'équation polaire de cette cissoïde est d'ailleurs immédiatement donnée par la valeur de q

$$q = \frac{p \sin^2\theta}{2\cos\theta},$$

l'axe polaire étant dirigé suivant OX'.

On sait d'ailleurs que le lieu de F', symétrique de F par rapport à OX, est le lieu de la projection de O sur la directrice de Q, et, par conséquent, la podaire de la parabole P par rapport à son sommet; et ce lieu est précisément la cissoïde (17).

4. L'équation de la tangente au sommet de la parabole Q qui passe par la projection de F sur OX est

$$y = -(x - \alpha)\cot\theta, \qquad (x + q\cos\theta)\cos\theta + y\sin\theta = 0$$

ou

$$x\cos\theta + y\sin\theta = -\frac{p}{2}\sin^2\theta\cos\theta. \tag{18}$$

La dérivée de cette équation par rapport à θ est

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = -\frac{p}{2}(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta). \tag{19}$$

En résolvant ces deux équations par rapport à x et y, on trouve pour les coordonnées d'un point de l'enveloppe de la tangente au sommet

$$x = \frac{p}{2}\sin^2\theta\cos 2\theta, \tag{20}$$

$$y = -\frac{p}{2}\cos^2\theta\sin 2\theta. \tag{21}$$

On reconnaît sous cette forme que les coordonnées (20) et (21) sont celles d'une *hypocycloïde triangulaire* rapportée à une tangente de rebroussement et à sa tangente perpendiculaire.

Les trois points de rebroussement ont pour coordonnées

$$\left(-\frac{p}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{p}{16}, \frac{3p\sqrt{3}}{16}\right), \quad \left(\frac{p}{16}, -\frac{3p\sqrt{3}}{16}\right).$$

L'hypocycloïde passe aussi par le point O et par les points $\left(0, \pm\frac{p}{4}\right)$.

Le rayon du cercle qui passe par les trois points de rebroussement est $\frac{3p}{8}$, et l'aire de l'hypocycloïde est $\frac{\pi p^2}{16}$.

Remarques. — Voici un certain nombre d'autres lieux géométriques ou enveloppes relatives à la même figure, et dignes d'être consignés.

1° *L'enveloppe de l'axe de la parabole* Q *est une courbe ayant pour aire* $\frac{5\pi p^2}{4}$;

2° *Le lieu de la projection de* O *sur la tangente au sommet est la courbe en coordonnées polaires*

$$r = -\frac{p}{2}\cos\theta \sin^2\theta,$$

dont l'aire est $\frac{\pi p^2}{64}$;

3° *Le lieu de la projection de* O *sur l'axe de* Q *est la courbe*

$$r = -p\cos^3\theta,$$

dont l'aire est $\frac{5\pi p^2}{16}$;

4° *Le lieu de la projection de* O *sur la corde focale principale de* Q *est la courbe*

$$r = -\frac{p\sin^2\theta\cos 2\theta}{2\cos\theta},$$

dont l'équation cartésienne est

$$(x^2+y^2)^2 x - \frac{p}{2}y^2(x^2-y^2) = 0.$$

C'est une courbe du cinquième degré.

1899.

(1900, p. 575.)

On donne un point A *et une droite* D *située à une distance* d *du point* A. *Une longueur* $BC = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ *se déplace sur* D. *Montrer que la droite d'Euler du triangle* ABC *enveloppe une parabole.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Prenons D pour axe des x, la perpendiculaire menée par A pour axe des y et posons $\overline{OB} = \lambda$, $\overline{BC} = a$: les coordonnées du barycentre G du triangle ABC étant

$$x = \frac{2\lambda + a}{3}, \qquad y = \frac{d}{3},$$

et celles du centre du cercle circonscrit M

$$x = \frac{2\lambda + a}{2}, \qquad y = \frac{d^2 + (a + \lambda)\lambda}{2d},$$

l'équation de la droite GM est

$$(2\lambda + a)(a + \lambda)\lambda - x(d^2 + 3a\lambda + 3\lambda^2) + y \cdot d(2\lambda + a) = 0;$$

en particulier, si $a = \frac{2d}{\sqrt{3}}$, elle devient, après suppression du facteur $(d + \lambda\sqrt{3})$,

$$2\lambda^2 + (2a - 3x)\lambda + d(2y - x\sqrt{3}) = 0,$$

dont l'enveloppe est

$$\left(3x - \frac{4d}{\sqrt{3}}\right)^2 - 8d(2y - x\sqrt{3}) = 0.$$

En transportant les axes au point $\left(o, \frac{d}{3}\right)$, l'équation de cette parabole prend la forme $9x^2 = 16d.y$.

Autre solution de M. Lez.