

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 230-232

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2_230_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. G. Painvin, à Nantes. — Il me semble que la fin de la solution de la question 1857 (novembre 1901, p. 527) n'est pas exacte à partir des mots *Le lieu cherché*, etc.

Si, en effet, au lieu de considérer les deux cônes A^2 et B^2 , on considère le cône C^2 , qui évidemment contient aussi le lieu, il faut que ce cône passe par l'intersection des deux premiers, ce qui est impossible si la projection du lieu se compose de $C'K$ et $A'B'$, droites qui constituent le contour apparent du cône C^2 et ne peuvent, par suite, être la projection d'une courbe tracée sur sa surface, sauf dans le cas où ce cône C^2 se réduit à deux plans, cas particulier qui est l'objet du dernier paragraphe. Dans le cas général, on trouve des arcs de coniques comme projections sur le plan.

M. d'Ocagne. — *Sur l'expression du rayon de courbure en coordonnées parallèles* (à propos de la question 1920). — J'ai commis une inadvertance dans l'énoncé de la question 1920, qui doit être ainsi modifié à partir de la quatrième ligne : « compris entre le point de contact et l'une des asymptotes ». Voici la voie qui m'y avait conduit.

En formant l'équation du centre de courbure répondant à la tangente (u, v) en coordonnées parallèles ⁽¹⁾ et écrivant ensuite que sa distance à cette tangente est égale au rayon de courbure R , on trouve

$$R = \frac{d^2v \, du - d^2u \, dv}{(dv - du)^3} \frac{[\delta^2 + (v - u)^2]^{\frac{3}{2}}}{\delta},$$

les axes de coordonnées Au et Bv étant supposés perpendiculaires à l'axe AB des origines et δ représentant la distance AB de ces origines.

Si l'on prend u comme variable indépendante, cette expres-

(1) *Coordonnées parallèles et axiales*. Paris, Gauthier-Villars; 1885.

(231)

sion devient

$$R = \frac{v''_u}{(v'_u - 1)^3} \frac{[\delta^2 + (v - u)^2]^{\frac{3}{2}}}{\delta},$$

et l'on en peut donner l'interprétation géométrique que voici : si la tangente dont le point de contact est M coupe l'axe Au en T, on a

$$R = v''_u \frac{\overline{MT}^3}{\overline{AB}^3}.$$

Soit, par exemple, une ellipse tangente en A et B à Au et Bv. Si l'on représente par 2a l'axe AB ou δ de cette ellipse, par 2b le second axe, l'équation de l'ellipse s'écrit

$$uv = b^2,$$

d'où

$$v''_u = \frac{2b^2}{v^3} = \frac{2b^2}{\overline{AT}^3},$$

et la formule précédente devient

$$R = \frac{b^2}{a} \frac{\overline{MT}^3}{\overline{AT}^3}.$$

Or, si du centre O de l'ellipse on abaisse sur la tangente MT la perpendiculaire OH = h, on a (1)

$$\overline{MT} \cdot h = \overline{AT} \cdot a.$$

Par suite,

$$R h^3 = a^2 b^2,$$

égalité qui se traduit par l'énoncé de la question 1919 (2).

On déduit de là

$$R h = \frac{a^2 b^2}{h^2} = \frac{a^2 b^2}{\rho^2 \sin^2 \omega},$$

en appelant ρ le demi-diamètre OM et ω l'angle de ce diamètre

(1) Il suffit, pour établir cette relation, de remarquer que les triangles OMT et OTA sont équivalents comme projections de triangles égaux dans le plan du triangle principal.

(2) *Nouvelles Annales*, 4^e série, t. II, p. 48.

avec la tangente MT , ou, en appelant ρ' le demi-diamètre conjugué et appliquant le second théorème d'Apollonius

$$Rh = \rho'^2.$$

Dans le cas de l'hyperbole, il suffit, dans ce qui précède, de changer b^2 en $-b^2$. Le demi-diamètre ρ' figurant dans cette dernière égalité doit alors être pris dans l'hyperbole conjuguée. Mais, pour n'avoir pas à faire intervenir celle-ci, il suffit de remarquer que ce demi-diamètre est égal au segment de la tangente MT , compris entre le point de contact et l'une des asymptotes. De là l'énoncé rectifié de la question 1920 (1), qui conduit à cette construction du centre de courbure :

Si le centre O de l'hyperbole se projette en I sur la normale en M , et si la tangente en M coupe l'une des asymptotes en R , la perpendiculaire élevée en R à IR passe par le centre de courbure situé sur la normale MI .