Certificats de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 226-229

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__226_1>

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

I. *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles de lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la développée d'une surface est que cette surface ait des rayons de courbure principaux dont la différence soit constante.*

II. *Démontrer que, pour que les rayons de courbure principaux d'une surface* S *soient fonctions l'un de l'autre, il faut et il suffit que, pour chaque point* M *de cette surface, le produit des quatre rayons de courbure principaux des deux nappes de la développée de* S, *aux centres de courbure principaux correspondant au point* M, *soit égal à la quatrième puissance de la distance de ces deux points.*

III. *Démontrer que, pour que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la développée d'une surface donnée, c'est-à-dire pour qu'à tout système conjugué tracé sur la première nappe corresponde un système conjugué de la seconde nappe, il faut que les deux* *rayons de courbure principaux de cette surface soient fonctions l'un de l'autre.*

Nota. — Dans les énoncés précédents, la correspondance entre les deux nappes de la développée a lieu entre les points de contact d'une même normale de la surface primitive avec ces deux nappes. (Toulouse, juillet 1901.)

I. *Démontrer que la connaissance d'un système cyclique équivaut à celle d'une enveloppe de sphères telle que les points focaux des cordes de contact soient conjugués harmoniques par rapport aux points de contact, et inversement. (On rappelle que les points de contact, avec leur enveloppe, des sphères dont il est question dans l'énoncé s'obtiennent en considérant les sphères de rayon nul passant par les cercles du système cyclique.)*

II. *Recherche des congruences formées de courbes planes identiques entre elles et normales à toutes les surfaces d'une famille.* (Toulouse, novembre 1901.)

La distance de deux points infiniment voisins d'une surface étant donnée par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(Au + Bv + C)^2},$$

on suppose que A, B, C *sont trois fonctions d'un paramètre t, ce paramètre étant lié aux variables u, v par la condition*

$$A'u + B'v + C' = 0 \tag{1}$$

(A', B', C' *désignant les dérivées de* A, B, C).

I. *On demande de calculer :*

1° *Les courbures géodésiques des lignes coordonnées;*

2° *Le produit des courbures principales en un point quelconque.*

II. *Démontrer que les lignes* $t =$ const. *forment une famille de cercles géodésiques. Trouver la propriété caractéristique de cette famille de cercles.*

III. *Déterminer les fonctions* A, B, C *de telle sorte que le* ds^2 *soit de la forme de Liouville.*

(Lille, novembre 1901.)

SOLUTION.

I. Les courbures géodésiques des lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont

$$-A \quad \text{et} \quad +B.$$

La courbure totale en un point (u, v) est

$$\frac{(A'^2 + B'^2)(Au + Bv + C) + (A^2 + B^2)(A''u + B''v + C'')}{A''u + B''v + C''}.$$

II. Les lignes $t = \text{const.}$ ont pour équation différentielle

$$A'\,du + B'\,dv = 0;$$

soit i leur inclinaison sur les lignes (v); on a

$$A' \cos i + B' \sin i = 0.$$

La courbure géodésique de ces lignes est $\dfrac{AA' + BB'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$. Cette courbure, comme l'angle i, ne dépendent que de t et sont constants le long de la ligne $t = \text{const.}$ Par suite, les lignes $t = \text{const.}$ sont des cercles géodésiques dont chacun coupe sous un angle constant les lignes coordonnées.

III. Écrivons que $\dfrac{1}{(Au + Bv + C)^2}$ vérifie $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} = 0$, en considérant t comme une fonction de u et v définie par la relation (1). Il vient

$$A'B'(Au + Bv + C) + 3AB(A''u + B''v + C'') = 0,$$

relation qui ne saurait être distincte de (1), sans quoi u et v ne seraient pas indépendants. L'identification donne

$$\frac{A}{A'}(A'B' + 3A''B) = \frac{B}{B'}(A'B' + 3AB'') = \frac{1}{C'}(A'B'C + 3ABC'').$$

La relation différentielle entre A et B montre, par deux intégrations successives, qu'il existe une relation linéaire à coefficients constants entre $A^{\frac{2}{3}}$ et $B^{\frac{2}{3}}$.

Si cette relation ne contient pas de terme constant, elle entraîne

$$pA + qB = 0,$$

p et q étant constants. Donc $A = qf(t)$ et $B = -pf(t)$; t, donné par (1) ou

$$(qu + pv)f'(t) + C' = 0$$

sera une fonction de $qu + pv$, et il en sera de même de $Au + Bv + C$; le ds^2 aura donc la forme $F(qu - pv)(du^2 + dv^2)$ et ne sera de la forme de Liouville que si F est linéaire; d'où

$$\text{(I)} \qquad ds^2 = (qu - pv)(du^2 + dv^2).$$

Si la relation renferme un terme constant, écrivons-la

$$(\alpha) \qquad (pA)^{\frac{2}{3}} + (qB)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

A et B vérifiant (α), C sera donné par une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre dont les solutions $C = A$ et $C = B$ sont évidentes; C sera de la forme $\alpha A + \beta B$, α et β étant des constantes; si donc on change u et v en $u - \alpha$ et $v - \beta$, on sera ramené au cas où $C \equiv 0$. Cela étant, différentions la relation (α) en tenant compte de (1), qui devient

$$A'u + B'v = 0;$$

nous aurons une relation entre A et B qui, avec (α), donne

$$Au + Bv = \left(\frac{p^2}{u^2} + \frac{q^2}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le ds^2 prendra la forme

$$\text{(II)} \qquad ds^2 = \left(\frac{p^2}{u^2} + \frac{q^2}{v^2}\right)(du^2 + dv^2).$$

[On trouvera des développements sur cette question dans un Mémoire de M. Demartre inséré dans les *Travaux de l'Université de Lille*, 1901 (*Sur certaines familles de courbes orthogonales et isothermes*).]