Nouvelles annales de mathématiques

E. Iaggi

Sur les zéros des fonctions entières

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 218-226

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__218_0>

[D4a]

SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. E. IAGGI.

1. Dans une précédente Note [1], nous avons donné la forme générale des relations entre les zéros a_1, a_2, ..., a_i, ... d'une fonction uniforme entière donnée sous forme de série

$$\frac{F(x)}{F(0)} = 1 + \frac{A_1}{1} x - \frac{A_2}{1.2} x^2 + \ldots \tag{1}$$

et les coefficients de cette série, et cela, en nous servant de la forme générale de $F(x)$ décomposée en facteurs primaires, qui est la suivante :

$$F(x) = F(0) e^{G(x)} \prod_i \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{g_i(x)}, \tag{2}$$

où les fonctions $G(x)$ et $g_i(x)$, ... s'annulent avec x. Ces relations sont

$$\left\{\begin{aligned}
A_1 &= \sum_i \left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right], \\
A_2 &= \sum_i \left[g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2}\right] + \left\{\sum_i \left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right]\right\}^2, \\
A_3 &= \sum_i \left[g'''_i(0) - \frac{2}{a_i^3}\right] \\
&\quad + 3\sum_i \left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right] \sum_i \left[g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2}\right] \\
&\quad + \left\{\sum_i \left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right]\right\}^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

[1] *Relations entre les zeros et les coefficients des fonctions entières* (*Nouvelles Annales*, janvier 1901).

lorsqu'il n'existe pas de facteur $e^{G(x)}$. Dans le cas contraire, il suffit d'ajouter à chacune des séries

$$\sum_i \left[g_i^{(n)}(0) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n} \right]$$

le terme correspondant

$$G^{(n)}(0).$$

Dans notre démonstration, nous avons simplement supposé, ce qui était nécessaire pour la décomposition de $F(x)$ en facteurs primaires, que les fonctions $g_i(x)$ étaient telles que la série

$$\sum_i \left[g_i'(x) + \frac{1}{x - a_i} \right]$$

fût convergente. Il convient d'examiner particulièrement la forme que MM. Weierstrass et Mittag-Leffler ont donnée à ces fonctions $g_i(x)$.

En supposant qu'il existe un nombre $\omega + 1$ tel que les séries

$$\sum_i \frac{1}{a_i^n} \qquad (n \quad \omega + 1)$$

soient convergentes, tandis que les séries analogues où n est inférieur à $\omega + 1$ sont divergentes, M. Mittag-Leffler a démontré qu'on pouvait prendre pour les $g_i(x)$ les fonctions

$$g_i(x) = \frac{x}{a_i} + \frac{x^2}{2a_i^2} + \frac{x^3}{3a_i^3} + \ldots + \frac{x^\omega}{\omega a_i^\omega}.$$

Dans ce cas, les ω séries

$$\sum_i \left[g_i^{(n)}(0) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n} \right] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \omega)$$

se réduisent identiquement à zéro. Quant aux autres,

$(n > \omega)$, elles deviennent simplement

$$\sum_i \left[-\frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n} \right] \qquad (n > \omega).$$

Les coefficients de la série $F(x)$ sont alors, en supposant que le facteur $e^{G(x)}$ n'existe pas,

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0,\\
A_2 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
A_\omega &= 0,\\
A_{\omega+1} &= \frac{(-1)^{\omega+1}}{\omega+1} S_{\omega+1},\\
A_{\omega+2} &= \frac{(-1)^{\omega+2}}{\omega+2} S_{\omega+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où $S_{\omega+1}$, $S_{\omega+2}$, ... désignent la somme des produits $\omega+1$ à $\omega+1$ des inverses $\frac{1}{a_i}$ des zéros, la somme de leurs produits $\omega+2$ à $\omega+2$, ... S'il existe un facteur $e^{G(x)}$ dans $F(x)$, les ω premiers coefficients ne sont plus nuls, mais ont pour valeurs

$$A_n = \left(\frac{d^n e^{G(x)}}{dx^n} \right)_{x=0} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \omega).$$

Pour obtenir les coefficients suivants, il conviendra de reprendre la forme générale (3), d'y annuler les quantités $g_i{}^n$, $(n > \omega)$, et d'ajouter à chacune des séries $\sum_i \left[-\frac{(n-1)!}{a_i^n} \right]$ le terme correspondant $G^{(n)}(0)$.

On obtient ainsi, sous forme de série, l'expression générale d'une fonction entière de genre ω.

Lorsque aucune des séries $\sum_i \frac{1}{a_i^n}$ n'est convergente, n étant fini, on prend pour $g_i(x)$ la même fonction que précédemment, mais on y fait $\omega = i - 1$ (Weierstrass).

Dans ce cas, les séries

$$\sum_i \left[g_i'(o) - \frac{1}{a_i}\right],$$

$$\sum_i \left[g_i''(o) - \frac{1}{a_i^2}\right],$$

$$\sum_i \left[g_i'''(o) - \frac{2}{a_i^3}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_i \left[g_i^{(n)}(o) - \frac{(n-1)!}{a_i^n}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

se réduisent respectivement à

$$-\frac{1}{a_1}, \quad -\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}, \quad -\frac{2}{a_1^3} - \frac{2}{a_2^3} - \frac{2}{a_3^3}, \quad \cdots,$$

$$-(n-1)!\left(\frac{1}{a_1^n} - \frac{1}{a_2^n} - \cdots - \frac{1}{a_n^n}\right), \quad \cdots.$$

Comme dans le cas précédent, il faut ajouter, à chacune de ces séries, le terme correspondant $G^{(n)}(o)$ pour former les coefficients A.

On peut observer, à l'égard de la formation des coefficients A, que la forme donnée par Weierstrass aux facteurs primaires convient non seulement au cas des fonctions de genre infini, mais *à tous les cas;* que, par conséquent, dans le cas où le genre est fini, on peut se servir des facteurs primaires de Weierstrass, au lieu de ceux de M. Mittag-Leffler; que ce changement, qui ne peut évidemment altérer la fonction $F(x)$ elle-meme, produit simplement un changement dans la fonction $G(x)$, mais non pas dans les coefficients $A_1, A_2, \ldots$; qu'enfin, si MM. Weierstrass et Mittag-Leffler ont pu, dans l'hypothèse où a_n croît indéfiniment avec n, former des produits convergents dont les zéros $a_1, a_2, \ldots,$

a_n, ... sont donnés, au moyen de certaines exponentielles $e^{g_i(x)}$, il ne s'ensuit pas que ces fonctions $g_i(x)$, *suffisantes* pour assurer la convergence du produit, doivent être *nécessairement de la forme indiquée* par MM. Weierstrass et Mittag-Leffler ([1]). On peut, au contraire, introduire arbitrairement dans ces exponentielles des facteurs tirés de $e^{G(x)}$, et l'on conçoit qu'on puisse considérer des produits convergents

$$\prod\left(1-\frac{x}{a_i}\right)e^{g_i(x)},$$

où les fonctions $g_i(x)$ sont telles que la série

$$\sum_i\left[g'_i(x)+\frac{1}{x-a_i}\right]$$

soit convergente, mais ne sont plus de la forme indiquée précédemment.

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème général suivant :

Pour que la fonction entière $F(x)$ *donnée par la série* (1) *admette pour zéros les points* $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, *et seulement ces points-là, il est nécessaire et suffisant que ses coefficients* $A_1, A_2, \ldots$ *satisfassent aux rela-*

([1]) Weierstrass a d'ailleurs fait lui-même une remarque analogue dans son Mémoire *Sur les fonctions analytiques uniformes*, où il a démontré la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires (Traduction de M. Picard, *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VIII).

On peut encore remarquer que la forme donnée jusqu'ici à l'exponentielle des facteurs primaires convient au cas où a_n croît indéfiniment avec n, mais ne conviendrait pas dans le cas contraire, cas qui peut cependant se présenter, par exemple, lorsque les quantités a_n dépendent d'un paramètre arbitraire, ou d'une variable autre que x; on peut alors concevoir des produits convergents de la forme considérée, mais où les $g_i(x)$ ne peuvent avoir la forme adoptée jusqu'ici.

tions (3), *dans lesquelles* $g'_\iota(0)$, $g''_\iota(0)$, ... *sont les valeurs des dérivées, pour* $x = 0$, *de certaines fonctions entières* $g_\iota(x)$ *qui rendent convergente la série*

$$\sum_\iota \left[g'_\iota(x) + \frac{1}{x - a_\iota} \right]$$

et qui ne sont d'ailleurs assujetties qu'à cette condition.

[On peut faire rentrer $G(x)$ dans les fonctions $g(x)$, puisque celles-ci n'ont plus une forme déterminée *à priori.*]

Si plusieurs des quantités a_i sont égales, rien n'est changé à cet énoncé. Si plusieurs de ces quantités sont nulles, soit n leur nombre; on considérera la fonction $\frac{F(x)}{x^n}$ et l'on rentrera dans le cas précédent.

Lorsque $\sum \frac{1}{a_\iota}$ est convergente, toutes les fonctions $g_i(x)$ se réduisent à une seule, $G(x)$; on peut d'ailleurs supprimer celle-ci, mais cette suppression n'est pas nécessaire.

2. Si l'on considère une fonction uniforme entière $F(x)$ décomposée en ses facteurs primaires

$$F(x) = F(0) e^{G(x)} \prod_\iota \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{g_i(x)},$$

où les $g_\iota(x)$ rendent convergent le produit indiqué, on peut, en affectant d'exposants réels quelconques, mais finis, les facteurs primaires, obtenir de nouvelles fonctions décomposées en facteurs primaires, mais qui ne seront plus uniformes.

Soit, par exemple,

$$f(x) = f(0)e^{G_1(x)} \prod_i \left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^{m_i} e^{m_i g_i(x)}.$$

La convergence du produit précédent ne dépend que de la convergence de la série

$$\sum_i m_i \left[g_i'(x) + \frac{1}{x - a_i} \right].$$

La série

$$\sum_i \left[g_i'(x) - \frac{1}{x - a_i} \right]$$

étant supposée convergente, la précédente l'est aussi, pourvu que tous les nombres m_i soient finis.

Si tous les nombres m_i sont commensurables entiers, on est ramené au cas précédemment étudié : $f(x)$ est une fonction uniforme entière.

Si, parmi les nombres commensurables m_i, il s'en trouve au moins un qui soit fractionnaire, la fonction $f(x)$ est une fonction multiforme *ponctale* (1).

Si, parmi les nombres m_i, il en est qui sont *incommensurables,* la fonction $f(x)$ est une fonction multiforme *improprement linéale* (2).

Or, les relations démontrées subsistent entre les zéros de $f(x)$ et les coefficients de cette fonction développée en série.

En effet, nous avons posé, pour démontrer ces relations,

$$f_i(x) = g_i(x) + \mathrm{L}\left(1 - \frac{x}{a_i}\right),$$

(1), (2) Au sujet de ces expressions, *voir* notre Note : *Sur les notions de fonction complète et de fonction périodique* (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 146-163).

en sorte que nous n'avons plus eu à développer en série qu'une exponentielle

$$e^{G(x)+\sum_i f_i(x)}.$$

Or, si les facteurs primaires sont affectés d'exposants m_i, on a à développer en série la fonction

$$e^{G(x)+\sum_i m_i f_i(x)}.$$

Les coefficients A_1, A_2, ... de la série seront donc les suivants, en supposant qu'on ait fait rentrer $G(x)$ dans les $g_i(x)$:

$$A_1 = \sum_i m_i \left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right],$$

$$A_2 = \sum_i m_i \left[g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2}\right] + \left\{\sum_i m_i \left[g'_i(0) + \frac{1}{a_i}\right]\right\}^2,$$

$$\begin{aligned} A_3 = {} & \sum_i m_i \left[g'''_i(0) - \frac{2}{a_i^3}\right] \\ & + 3\sum_i m_i \left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right] \sum_i m_i \left[g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2}\right] \\ & + \left\{\sum_i m_i \left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right]\right\}^3, \end{aligned}$$

....

On pourrait encore considérer le cas d'exposants m_i imaginaires; les points a_i correspondants seraient alors des points singuliers essentiels de $f(x)$. Mais le cas que nous venons de traiter, où les exposants m_i sont réels et quelconques, nous suffit pour les applications que nous voulons tirer de ces relations.

De ce qui précède on peut conclure qu'*il existe des fonctions multiformes auxquelles la décomposition en* *facteurs primaires est applicable et dont les coefficients des développements en série satisfont aux relations indiquées précédemment.*

On pourra appeler *ordre d'un zéro* a_i le nombre m_i correspondant, qu'il soit entier, fractionnaire ou incommensurable, et alors on pourra énoncer cette loi générale :

Chaque terme d'une quelconque des séries $\sum_i$ *qui entrent dans la formule d'un coefficient quelconque* A_n *est multiplié par l'ordre* m_i *du zéro* a_i *relatif à ce terme.*