Nouvelles annales de mathématiques

C. Maltézos

# Sur la chute des corps dans le vide et sur certaines fonctions transcendantes

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 2 (1902), p. 197-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__197_1>

[R8cβ]

# SUR LA CHUTE DES CORPS DANS LE VIDE ET SUR CERTAINES FONCTIONS TRANSCENDANTES;

PAR M. C. MALTÉZOS,
Professeur à l'École militaire, Athènes.

1. Les équations différentielles de la chute des corps dans le vide, sans vitesse initiale, en tenant compte du

mouvement de rotation de la Terre, sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2\omega\sin\lambda\,\frac{dy}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 2\omega\left(\sin\lambda\,\frac{dx}{dt}+\cos\lambda\,\frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g-2\omega\cos\lambda\,\frac{dy}{dt}, \end{aligned}\right.$$

en prenant pour axe des $x$ la méridienne, dirigée vers le nord, pour axe des $y$ une perpendiculaire dans le plan horizontal, dirigée vers l'est, et pour axe des $z$ la verticale de l'origine, dirigée vers le bas. $\lambda$ représente la latitude, et $\omega$ la rotation.

En intégrant on obtient les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2\omega y\sin\lambda,\\ \frac{dy}{dt} &= 2\omega(x\sin\lambda+z\cos\lambda),\\ \frac{dz}{dt} &= gt-2\omega y\cos\lambda. \end{aligned}\right.$$

La troisième s'écrit à l'aide de la première

$$\frac{dz}{dt} = gt+\cot\lambda\,\frac{dx}{dt},$$

d'où

$$(3)\qquad z = \tfrac{1}{2}gt^2+x\cot\lambda.$$

En remplaçant dans la deuxième, on obtient

$$\frac{dy}{dt} = g\omega t^2\cos\lambda+\frac{2\omega x}{\sin\lambda},$$

et

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2g\omega t\cos\lambda-4\omega^2y.$$

Cette équation admet comme solution la seconde des équations

$$(5)\quad \begin{cases} x = \dfrac{g \sin\lambda \cos\lambda}{4\omega^2}(1 - 2\omega^2 t^2 - \cos 2\omega t), \\ y = \dfrac{g \cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t). \end{cases}$$

La déviation $x$, comme d'ailleurs il est bien connu, est très petite et moindre que $y$.

On peut trouver $z$ d'une autre manière, par une approximation plus que suffisante. Nous avons, en effet, l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - 4\omega^2 \cos\lambda (x \sin\lambda + z \cos\lambda).$$

En négligeant le terme $4\omega^2 x \cos\lambda \sin\lambda$ devant les autres, on obtient

$$(6)\qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = g - \varphi^2 z \qquad (\varphi^2 = 4\omega^2 \cos^2\lambda).$$

En intégrant, on trouve l'équation

$$(7)\qquad z = \frac{g}{\varphi^2}(1 - \cos\varphi t),$$

pour laquelle les deux premiers termes du second membre (en $t^2$ et $t^4$) sont les mêmes que ceux de l'équation (3), à laquelle elle devient exactement identique pour l'équateur.

*Remarque.* — Si la hauteur de la chute est assez grande, en supposant variable l'intensité de l'accélération, on obtient, dans le cas où $z$ est assez petit devant R (en désignant par R le rayon terrestre terminé à l'origine et $g$ l'accélération à l'origine),

$$(8)\qquad z = \frac{g}{\varphi^2}\,\frac{e^{\varphi t} + e^{-\varphi t} - 2}{2},$$

avec

$$\varphi^2 = \frac{2g}{R} - 4\omega^2 \cos^2\lambda.$$

2. Si l'on pose

$$C_1 = \cos\varphi t = \cos\psi, \qquad C_2 = 1.2\,\frac{1-C_1}{\varphi^2 t^2} = 1.2\,\frac{1-C_1}{\psi^2},$$

l'équation (7) peut s'écrire

$$z = C_2\,\frac{gt^2}{2}.$$

La courbe $C_2 = 1.2\,\dfrac{1-\cos\psi}{\psi^2}$ est symétrique par rapport à l'axe des C, qu'elle rencontre à la distance 1 de l'origine, où elle passe par un maximum. Cette courbe possède une série de minima et maxima.

Les minima sont donnés par l'équation

$$\sin\frac{\psi}{2} = 0,$$

d'où

$$\psi = 2m\pi \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

et les maxima par l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}.$$

Les fonctions $C_1$, $C_2$ peuvent être généralisées. Posons, en effet,

$$\begin{aligned} C_k &= 1 - \frac{\psi^2}{(2k-1)2k} + \frac{\psi^4}{(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)} - \ldots \\ &= (2k-3)(2k-2)\,\frac{1-C_{k-1}}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Ces équations représentent des courbes rencontrant l'axe des ordonnées à la distance 1 de l'origine, où elles passent par un maximum, et elles sont symétriques autour de l'axe des C.

Pour toute valeur réelle de $\psi$ (différente de zéro), on a

$$0 \leqq C_2 < C_3 < \ldots < C_k < 1$$

($C_2$ seule s'annule aux minima).

Les fonctions C possèdent la propriété de vérifier la condition

$$C_1(x) - \frac{z^2}{1.2} C_2(x) + \frac{z^4}{1.2.3.4} C_3(x) - \ldots$$
$$= C_1(z) - \frac{x^2}{1.2} C_2(z) + \frac{x^4}{1.2.3.4} C_3(z) - \ldots.$$

L'équation différentielle de $C_k$ est

$$\frac{d^2 C_k}{d\psi^2} + \frac{4(k-1)}{\psi} \frac{dC_k}{d\psi} + \left[1 + \frac{(2k-3)(2k-2)}{\psi^2}\right] C_k = \frac{(2k-3)(2k-2)}{\psi^2}.$$

On peut lui donner la forme plus générale

$$(9) \qquad \frac{d^2 u}{d\psi^2} + \frac{\alpha}{\psi} \frac{du}{d\psi} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\psi^2}\right) u = \frac{\delta}{\psi^2},$$

dont la solution est

$$(10) \qquad u = A_0 + A_2 \psi^2 + A_4 \psi^4 + \ldots + A_{2m} \psi^{2m} + \ldots;$$

avec

$$A_0 = \frac{\delta}{\gamma},$$
$$A_2 = -\beta \frac{A_0}{1.2 + 2\alpha + \gamma},$$
$$A_4 = (-\beta)^2 \frac{A_0}{(1.2 + 2\alpha + \gamma)(3.4 + 4\alpha + \gamma)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{2m} = (-\beta)^m \frac{A_0}{(1.2 + 2\alpha + \gamma)(3.4 + 4\alpha + \gamma)\ldots[(2m-1)2m + 2m\alpha + \gamma]},$$

la série (10) est rapidement convergente, quand $\alpha$ et $\gamma$ sont positifs.

*Cas particuliers.* — D'autres cas remarquables de $u$ sont les suivants :

*a.* Posons $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$; on obtient alors

$$u = A_0 \left[ 1 - \frac{\psi^2}{2^2} + \frac{\psi^4}{2^2 4^2} - \ldots + (-1)^m \frac{\psi^{2m}}{2^2 4^2 \ldots \overline{2m}^2} + \ldots \right],$$

où $A_0$ désigne une constante arbitraire. On a donc

$$u = A_0 J_0;$$

$J_0$ désignant la première des fonctions de Bessel.

*b*. Posons de même $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -(2n)^2$, $\delta = 0$; on trouve

$$A_0 = A_2 = A_4 = \ldots = A_{2n-2} = 0, \qquad A_{2n} = \frac{0}{0},$$

c'est-à-dire une constante arbitraire, qu'on peut écrire

$$A_{2n} = B' = \frac{B}{2^{2n}(2n)!};$$

on a donc finalement

$$u = \frac{B\psi^{2n}}{2^{2n}(2n)!} \left[ 1 - \frac{\psi^2}{2(4n+2)} + \frac{\psi^4}{2.4(4n+2)(4n+4)} - \ldots \right] = BJ_{2n}(\psi).$$

Les fonctions *paires* de Bessel sont donc des cas particuliers de $u$.

3. De même qu'on a déduit du cosinus des fonctions plus générales, on peut en déduire d'autres du sinus. Posons, en effet,

$$s_1 = \psi - \frac{\psi^3}{2.3} + \frac{\psi^5}{2.3.4.5} - \ldots = \sin\psi,$$

$$s_2 = \psi - \frac{\psi^3}{4.5} + \frac{\psi^5}{4.5.6.7} - \ldots = 2.3 \frac{\psi - s_1}{\psi^2} \quad (^1),$$

..................................,

$$s_k = \psi - \frac{\psi^3}{2k(2k+1)} - \frac{\psi^5}{2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)} - \ldots$$

$$= (2k-2)(2k-1) \frac{\psi - s_{k-1}}{\psi^2},$$

(1) Les maxima et minima de $s_2$ s'obtiennent par les équations $\cos\frac{\psi}{2} = 0$, d'où $\psi = (2m+1)\pi$ pour les maxima, et $\tang\frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}$

$s_k$ vérifiant l'équation

$$\frac{d^2 s_k}{d\psi^2} + \frac{4(k-1)}{\psi}\frac{ds_k}{d\psi} + \left[1 + \frac{(2k-2)(2k-3)}{\psi^2}\right] s_k = \frac{(2k-1)(2k-2)}{\psi}.$$

Et, en généralisant,

$$(11) \qquad \frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{\alpha}{\psi}\frac{dv}{d\psi} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\psi^2}\right) v = \frac{\delta}{\psi},$$

dont la solution est la suivante :

$$(12) \qquad v = A_1 \psi + A_3 \psi^3 + \ldots + A_{2m+1} \psi^{2m+1} + \ldots,$$

avec

$$A_1 = \frac{\delta}{\alpha + \gamma},$$

$$A_3 = -\beta \frac{A_1}{2.3 + 3\alpha + \gamma},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{2m+1} = (-\beta)^m \frac{A_1}{(2.3 + 3\alpha + \gamma)(4.5 + 5\alpha + \gamma)\ldots[2m(2m+1) + (2m+1)\alpha + \gamma]}.$$

*Cas particulier.* — Posons

$$\alpha = \beta = 1, \qquad \gamma = -(2n+1)^2, \qquad \delta = 0;$$

on aura alors

$$A_1 = A_3 = \ldots = A_{2n-1} = 0, \qquad A_{2n+1} = \frac{0}{0},$$

ce qui est la constante arbitraire, qu'on peut écrire

$$A_{2n+1} = B' = \frac{B}{2^{2n+1}(2n+1)!},$$

---

pour les minima, excepté la valeur $\psi = 0$, car, à l'origine, la courbe possède un point d'inflexion, avec une tangente bissectrice de l'angle positif des axes. Il est à remarquer que les abscisses des minima de $s_2$ sont les mêmes que celles des maxima de $C_2$.

et l'on aura

$$v = \frac{B\psi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}\left\{1 - \frac{\psi^2}{2[(2n+1)2+2]} + \ldots\right\} = BJ_{2n+1}(\psi).$$

Les fonctions *impaires* de Bessel sont donc des cas particuliers de $v$.