NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL APPELL

Sur les expressions des tensions en fonction des déformations dans un milieu élastique homogène et isotrope

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 193-197

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__193_0>

[T2a]

SUR LES EXPRESSIONS DES TENSIONS EN FONCTION DES DÉFORMATIONS DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE HOMOGÈNE ET ISOTROPE;

PAR M. PAUL APPELL.

Soit un milieu élastique homogène et isotrope dont les points occupent, à l'état naturel, des positions $P(x, y, z)$. Si l'on déforme le milieu en lui faisant subir une déformation infiniment petite, le point P vient occuper une position $P_1(x_1, y_1, z_1)$; il subit donc un déplacement infiniment petit dont les projections sont

$$(1) \qquad u = x_1 - x, \qquad v = y_1 - y, \qquad w = z_1 - z.$$

Dans ces conditions, les tensions intérieur s sont caractérisées en chaque point par six fonctions

$$(2) \qquad N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3$$

de x, y, z. Le problème fondamental à résoudre est d'exprimer ces six fonctions à l'aide des dérivées des déplacements (1).

Nous nous proposons d'indiquer ici une méthode géométrique pour obtenir ces expressions, méthode qui consiste à chercher la relation qui lie deux quadriques particulières appelées, l'une *quadrique directrice des tensions*, l'autre *surface des déformations*. On pourra consulter, pour la définition de ces quadriques, le Tome III de mon *Traité de Mécanique rationnelle;* on pourra également se reporter à un article de M. Sarrau intitulé : *Notions sur la théorie de l'élasticité,* publié dans ce Journal (3e série, t. VII, novembre et décembre 1888). Nous adopterons ici les notations de ce dernier article.

La déformation du milieu au point P est caractérisée par les six quantités

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & a_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & a_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ 2b_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & 2b_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & 2b_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

La quadrique directrice des tensions (Q), en P, a pour équation

$$(\mathrm{Q})\quad \begin{cases} \varphi(x, y, z) \equiv \mathrm{N}_1 x^2 + \mathrm{N}_2 y^2 + \mathrm{N}_3 z^2 \\ \qquad + 2\mathrm{T}_1 yz + 2\mathrm{T}_2 zx + 2\mathrm{T}_3 xy = \pm 1, \end{cases}$$

par rapport à des axes $\mathrm{P}x$, $\mathrm{P}y$, $\mathrm{P}z$ issus de P.

La surface des déformations (S) au même point a pour équation, par rapport aux mêmes axes,

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} \psi(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 \\ \qquad + 2b_1 yz + 2b_2 zx + 2b_3 xy = \pm 1. \end{cases}$$

Les quantités (2) N et T sont supposées être des fonctions linéaires et homogènes, à coefficients constants, des a et b

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{N}_1 = \mathrm{A}_1 a_1 + \mathrm{A}_2 a_2 + \mathrm{A}_3 a_3 + \mathrm{B}_1 b_1 + \mathrm{B}_2 b_2 + \mathrm{B}_3 b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{T}_1 = \mathrm{C}_1 a_1 + \mathrm{C}_2 a_2 + \mathrm{C}_3 a_3 + \mathrm{D}_1 b_1 + \mathrm{D}_2 b_2 + \mathrm{D}_3 b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

les coefficients A, B, C, D, ... étant des *constantes*. Comme le milieu est *isotrope*, c'est-à-dire a la même constitution dans toutes les directions autour de chaque point, les relations (4) doivent être *indépendantes du choix des axes*. Si, en prenant de nouveaux axes $\mathrm{P}x'y'z'$, on amène les deux quadriques à avoir pour équations

$$N'_1 x'^2 + \ldots + 2 T'_1 y' z' + \ldots = \pm 1,$$
$$a'_1 x'^2 + \ldots + 2 b'_1 y' z' + \ldots = \pm 1,$$

les N′, T′ sont donnés en fonction des a', b' par les mêmes formules (4) avec les mêmes coefficients A, B, C, D, ... De là résultent, entre ces coefficients, des relations qui permettent, comme il est connu, de les réduire à *deux*. Nous allons faire cette réduction en mettant en évidence la relation géométrique qui lie les deux quadriques (Q) et (S). Cette relation est la suivante :

Les deux quadriques ont les mêmes plans de sections circulaires.

1° Tout d'abord *les deux quadriques ont les mêmes plans principaux*. En effet, soient PX, PY, PZ les axes de la quadrique (S) : les déformations étant symétriques par rapport aux plans XPZ, YPX, ZPY, il en est de même des tensions qui en résultent ; la quadrique (Q) a donc les mêmes plans pour plans de symétrie.

2° Pour voir que les plans de sections circulaires sont les mêmes, prenons, pour un instant, les droites PX, PY, PZ pour axes de coordonnées : les équations des deux quadriques deviennent

$$\Phi(X, Y, Z) = n_1 X^2 + n_2 Y^2 + n_3 Z^2 = \pm 1,$$
$$\Psi(X, Y, Z) = \alpha_1 X^2 + \alpha_2 Y^2 + \alpha_3 Z^2 = \pm 1.$$

Les formules (4), étant indépendantes du choix des axes, s'appliquent aux formes actuelles des équations où les b sont nuls. On a donc

$$n_1 = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3.$$

Mais, si l'on permute PY et PZ, n_1 ne change pas et

α_2 et α_3 se permutent : donc l'expression précédente ne doit pas changer quand on permute α_2 et α_3, et l'on a $A_2 = A_3$; on peut donc écrire

$$n_1 = A_1\alpha_1 + A_2(\alpha_2 + \alpha_3) = A_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (A_1 - A_2)\alpha_1.$$

Nous écrirons

$$n_1 = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2\mu\alpha_1. \tag{5}$$

Nous aurons de même n_2, n_3 par permutation circulaire des axes PX, PY, PZ, c'est-à-dire des indices 1, 2, 3. La somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ est, d'après un théorème élémentaire sur les fonctions des coefficients d'une quadrique qui ne changent pas quand on fait un changement d'axes rectangulaires, égale à $a_1 + a_2 + a_3$; cette somme s'appelle la *dilatation* cubique :

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

La formule (5) et les deux qu'on en déduit par permutation sont donc

$$\left\{\begin{aligned} n_1 &= \lambda\theta + 2\mu\alpha_1, \\ n_2 &= \lambda\theta + 2\mu\alpha_2, \\ n_3 &= \lambda\theta + 2\mu\alpha_3. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Mais alors, en se reportant aux fonctions Φ et Ψ qui forment les premiers membres des équations réduites des deux quadriques, on voit qu'elles vérifient l'identité

$$\Phi(X, Y, Z) \equiv \lambda\,\theta(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2\mu\,\Psi(X, Y, Z), \tag{7}$$

qui montre que les deux quadriques *ont les mêmes plans de sections circulaires*.

Si l'on revient aux axes primitifs Px, Py, Pz, les formes $\Phi(X, Y, Z)$, $\Psi(X, Y, Z)$ et $X^2 + Y^2 + Z^2$ se transforment en $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ et $x^2 + y^2 + z^2$, et l'identité (7) devient

$$\varphi(x, y, z) \equiv \lambda\,\theta(x^2 + y^2 + z^2) + 2\mu\,\psi(x, y, z). \tag{8}$$

En remplaçant les fonctions φ et ψ par leurs expressions et identifiant, on obtient les formules classiques

$$N_k = \lambda\theta + 2\mu a_k, \qquad T_k = 2\mu b_k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Remarque I. — Les quantités n_1, n_2, n_3 sont les racines de l'équation en S relative à la quadrique (Q); les quantiés α_1, α_2, α_3, les racines de l'équation en S pour la quadrique (S). On conclut alors des relations (6) les relations qui lient les coefficients des deux équations en (S), c'est-à-dire les fonctions des coefficients des deux quadriques qui restent inaltérées par un changement d'axes rectangulaires.

Remarque II. — En faisant intervenir, à la place de (S), une autre quadrique appelée *ellipsoïde des dilatations,* dont on trouvera la définition dans le Tome III de mon *Traité de Mécanique,* on pourrait, dans une certaine mesure, étendre les considérations précédentes *au cas des déformations finies*. On aurait alors à résoudre un problème de Géométrie analogue au précédent, avec cette différence que les relations donnant les coefficients de l'une des quadriques en fonctions de ceux de l'autre *ne sont plus linéaires*.