NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. MÉRAY

Sur le déplacement d'une figure solide

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 17-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__17_1>

[K13a]

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE SOLIDE;

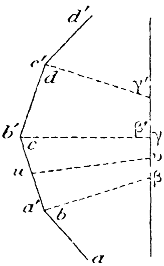
Par M. Ch. MÉRAY,
Professeur à l'Université de Dijon.

1. La propriété de tout déplacement d'une figure solide de pouvoir être réalisé par une translation et une rotation successives, dont la direction et l'axe sont parallèles quand leurs amplitudes ne sont nulles ni l'une ni l'autre, est un fait aussi simple qu'il est capital en Cinématique. En y revenant par hasard, j'ai donc été étonné de n'en trouver partout que des démonstrations émiettées sur des cas particuliers artificiellement séparés, constituant pour le plus général une progression de raisonnements détournés, laissant des vues peu

nettes, et je proposerai la méthode suivante qui me semble directe et plus intuitive.

2. Ayant d'abord rappelé l'axiome consistant en ce que *deux figures solides égales entre elles sont superposées dans toutes leurs parties dès que trois points non en ligne droite dans l'une ont été amenés à coïncider respectivement avec leurs homologues dans l'autre,* je nommerai a (*fig.* 1) la position initiale d'un

Fig. 1.



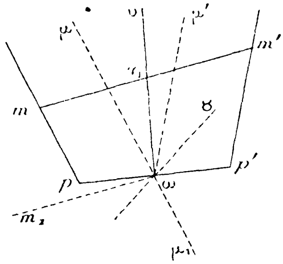
point quelconque de la figure qui s'est déplacée, a' sa position finale, b le point de la première position de la figure avec lequel se confond le point a' de sa seconde, puis, de même, b' la position finale de b, c le point de la première position avec lequel b' se confond, c' la position finale de c, enfin d et d' les positions initiale et finale du point de la figure coïncidant primitivement avec c'. Comme le déplacement de toute la figure amène sa partie $abcd$ sur $a'b'c'd'$, la ligne brisée $abcdd'$ (ou bien encore $aa'b'c'd'$) est *régulière,* en ce sens que ses côtés aa', bb', cc', dd' sont tous égaux entre eux, ainsi que leurs angles plans de sommets b (ou a'), c (ou b'), d (ou c') et aussi que les angles dièdres $\overline{abcd}$, $\overline{a'b'c'd'}$.

Il y a maintenant à distinguer les cas suivants.

3. *Les quatre points a, b, c, d ne sont pas dans un même plan*, cas auquel il en est de même pour a', b', c', d' puisque ces deux figures sont égales, excluant celui où trois consécutifs de ces cinq points seraient en ligne droite et cet autre, à plus forte raison, où deux consécutifs coïncideraient.

I. *Deux demi-droites pm, p'm' (fig. 2), ayant pour*

Fig. 2.



plus courte distance le segment pp' compris entre leurs origines, forment une figure qui admet pour axe de symétrie la bissectrice ωυ de l'angle μωμ' compris entre les parallèles ωμ, ωμ' menées à pm, p'm' par le milieu ω de pp'. Si, en outre, les points m, m' pris sur ces demi-droites sont tels que les angles pmm', p'm'm soient égaux, ils sont symétriques par rapport à l'axe dont il s'agit; en particulier, cet axe coïncide avec ωη, droite joignant les milieux de pp' et de mm'.

1° Le plan μωμ', parallèle aux deux droites pm, $p'm'$ à la fois, est perpendiculaire à leur plus courte distance pp'; la bissectrice ωυ qui appartient à ce plan jouit donc de la même propriété, et, comme elle est axe de symétrie pour les demi-droites ωμ, ωμ', la figure $pmp'm'$ se réapplique sur elle-même en $p'm'pm$, après une rotation d'un demi-tour exécutée autour de l'axe ωυ;

car p vient en p' et p' en p, parce que $\omega p = \omega p'$ et que la droite $p\omega p'$ est une perpendiculaire à l'axe, et les demi-droites pm, $p'm'$ viennent en $p'm'$, pm à cause de ceci et de ce que les parallèles $\omega\mu$, $\omega\mu'$ aux premières viennent en $\omega\mu'$, $\omega\mu$ parallèles aux dernières.

2° L'égalité des angles pmm', $p'm'm$ entraîne évidemment celles de $\mu_1\omega m_1$, $\mu'\omega m_1$, angles formés respectivement avec $\omega\mu_1$, demi-droite opposée à $\omega\mu$, et $\omega\mu'$, par ωm_1, parallèle menée par ω à l'une ou à l'autre des directions de mm'. Cette droite ωm_1 est donc située dans le plan mené perpendiculairement à celui de l'angle $\mu_1\omega\mu'$ par la bissectrice $\omega 8$ de cet angle, c'est-à-dire dans le plan mené par ω perpendiculairement à l'axe $\omega\upsilon$, puisque la bissectrice extérieure $\omega 8$ de l'angle $\mu\omega\mu'$ est perpendiculaire sur l'autre $\omega\upsilon$. La droite mm' est donc située dans quelque plan perpendiculaire aussi à l'axe $\omega\upsilon$, et les points m, m' sont symétriques puisqu'ils sont ainsi les intersections des droites symétriques pm, $p'm'$ par un plan symétrique à lui-même.

II. Maintenant (*fig.* 1), nous mènerons les bissectrices des angles abb', bcc', cdd', en remarquant que deux consécutives ne peuvent être dans un même plan à cause de l'hypothèse caractérisant le cas que nous traitons, et que les demi-angles découpés par elles dans les angles b, c, d sont tous égaux entre eux ainsi que ces derniers le sont les uns aux autres. Nous construirons ensuite les perpendiculaires communes $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ aux deux premières bissectrices et aux deux dernières, perpendiculaires dont la complète détermination de chacune assure l'égalité des quadrilatères gauches $bc\beta\gamma$, $b'c'\beta'\gamma'$, puis nous joindrons les milieux u, υ des segments bc, $\beta\gamma$.

La symétrie par rapport à uv, du quadrilatère gauche $bc\beta\gamma$, aux angles droits β, γ, aux angles égaux b, c (I) donne $c\gamma = b\beta$, puis $= b'\beta'$ à cause de l'égalité des quadrilatères $bc\beta\gamma$, $b'c'\beta'\gamma'$, et les points β', γ coïncident forcément, puisque b' et c ne sont que deux notations d'un même point. La même égalité de ces deux quadrilatères, combinée avec cette circonstance que le premier peut être réappliqué sur lui-même en $cb\gamma\beta$ à cause de sa symétrie absolue par rapport à l'axe uv (*loc. cit.*), entraîne celle des figures $b'c'\beta'\gamma'$, $cb\gamma\beta$ et par suite leur superposition complète après une demi-révolution de la première autour de $b'\beta'$ pris pour axe; car alors les trois points b', β', c', non en ligne droite dans la première, tombent en c, γ, b (les deux premiers restant en réalité immobiles) parce que l'on a $b'c' = cb$ et que la bissectrice $b'\beta'$ (notée encore $c\gamma$) est un axe de symétrie pour l'angle bcc' (2). En particulier, $\beta'\gamma'$ se superpose à $\gamma\beta$, d'où la conséquence que le segment $\beta'\gamma'$ égal à $\beta\gamma$ est aussi son simple prolongement.

Dans le déplacement de la figure considérée, la droite $\beta\gamma\beta'\gamma'$ ne fait donc que se réappliquer sur elle-même, puisque deux de ses points distincts β, γ viennent tomber en β', γ' que nous venons de voir appartenir à la même droite, et *le déplacement en question peut évidemment être réalisé par une translation de direction parallèle à cette droite et d'amplitude $\beta\beta'$, suivie ou précédée d'une rotation autour de cette même droite, capable d'amener le plan $b\beta\gamma$ en $b'\beta'\gamma'$.*

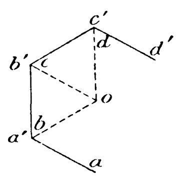
On remarquera que *tous les points de la figure se déplacent,* car le plan perpendiculaire à l'axe mené par l'un quelconque d'entre eux se transporte de la longueur $\beta\beta' \neq 0$ dans la direction de cet axe.

Si, par les moyens indiqués pour la tracer, on prolonge dans les deux sens et indéfiniment la ligne brisée gauche régulière $abcdd'$, on constatera immédiatement qu'elle est inscrite dans une hélice ayant l'axe pour âme, et que le déplacement étudié correspond à la réapplication de cette ligne hélicoïdale ... $abcd$ ... sur elle-même en ... $a'b'c'd'$.... De cette observation on conclurait facilement que les hélices sont les seules lignes gauches qui soient susceptibles de glisser indéfiniment sur elles-mêmes.

4. *Les quatre points a, b, c, d sont dans un même plan, mais non en ligne droite,* cas auquel a', b', c', d' sont sur le même plan, excluant celui où deux consécutifs de ces cinq points coïncideraient.

Nos trois bissectrices (*fig.* 3) tombent dans le même

Fig. 3.



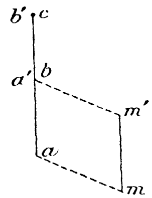
plan, et les choses restent les mêmes que ci-dessus (3, II), à cela près que β, γ, γ' se confondent en un seul point o, pied sur le même plan d'une perpendiculaire identique à la perpendiculaire commune à ces trois droites. *L'amplitude de la translation est nulle, et le déplacement peut être réalisé par une simple rotation ayant toujours pour axe cette perpendiculaire commune, avec une amplitude capable d'amener ob en ob'.*

Il est évident que, *sauf ceux de l'axe, naturellement immobiles, tous les autres points de la figure se déplacent.*

5. *Les trois points a, b, c sont en ligne droite, mais a, b ne coïncident pas, ni par suite b, c.*

Un point quelconque de la figure se déplace nécessairement alors, car la droite ab (*fig.* 4) se réapplique

Fig. 4.



sur elle-même en $a'b'$ et tout plan perpendiculaire subit évidemment une translation d'amplitude $aa' \neq 0$ dans le sens de cette même direction aa'. Soient ensuite m un point étranger à la droite ab, et m' sa position finale.

Si aa', mm' ne sont pas dans un même plan, la construction, à partir de m, d'une ligne brisée $mnpqq'$ analogue à la ligne $abcdd'$ du n° 2 montrera que cette ligne est gauche et que l'on se retrouve dans le cas discuté au n° 3, II; seulement l'axe de rotation et de glissement est noté ici par abc.

Si, au contraire, aa', mm' tombent dans un même plan, les segments am, $a'm'$ ne peuvent manquer de s'y trouver aussi, et comme le déplacement amène les trois points a, b, m non en ligne droite, en a', b', m', les segments am, am' sont égaux ainsi que les angles bam, $b'a'm'$. Il s'ensuit que le segment mm' est parallèle et égal à aa', puis que *le déplacement considéré peut être réalisé par une simple translation de mêmes direction et amplitude que ce segment aa'.*

6. *Les points a, b (ou a') coïncident.* — Nous con-

sidérerons alors un autre point m de la figure, sa position finale m', et nous ferons les distinctions suivantes :

I. *Le point m' ne coïncide pas avec m.* — En construisant la ligne brisée $mnpqq'$ comme il a été expliqué, ci-dessus (5), on verra immédiatement qu'elle est plane, car autrement (3, II) tous les points de la figure se déplaceraient, et a' ne se confondrait pas avec a (il ne serait pas difficile d'établir ce point directement); en outre, ses côtés ne peuvent se prolonger les uns les autres, car les points m, n, p, q, q', tous distincts, en ligne droite et en nombre > 2, seraient équidistants d'un même point a, ce qui est impossible. On retombe ainsi sur le cas d'une simple rotation (4); l'axe passe nécessairement par le point a (ou a'), puisque ce point se déplacerait s'il n'était pas sur l'axe (*ibid.*).

II. *Le point m' coïncide avec m.* — 1° Si un troisième point k non situé sur la droite am se déplace, on est ramené immédiatement au cas précédent (I), et cette même droite est l'axe de rotation puisque deux de ses points a, m sont immobiles.

2° *Si k ne se déplace pas non plus,* il en est de même pour la totalité de la figure considérée, puisque ses trois points a, m, k non en ligne droite demeurent immobiles (2).

7. Les considérations précédentes fourniraient tout aussi bien une solution du problème :

Trois points non en ligne droite, a, e, h, étant donnés ainsi que trois autres a', e', h' formant une figure égale, trouver la rotation et la translation dont l'exécution successive amène le triangle aeh en coïncidence avec $a'e'h'$.

Car la construction facile des droites $a'a''$, $e'e''$, $h'h''$, placées relativement au triangle $a'e'h'$ comme aa', ee', hh' le sont respectivement par rapport au triangle abc, donne les trois angles rectilignes $aa'a''$, $ee'e''$, $hh'h''$ dont la discussion conduit rapidement au but. Par exemple, si deux de ces angles sont *propres,* il y a une rotation dont l'axe est immédiatement fourni par la perpendiculaire commune à leurs bissectrices; etc. Mais je me bornerai à cette indication en laissant de côté d'autres artifices plus expéditifs dans certains cas particuliers.