E. Lacour

Exemple de transformation birationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 169-177
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__169_1>

[P4a]

EXEMPLE DE TRANSFORMATION BIRATIONNELLE;

PAR M. E. LACOUR.

Quand on commence l'étude des transformations birationnelles, il est bon de vérifier les propositions générales sur des exemples simples. La question suivante pourra fournir un de ces exemples.

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy *et un point* I, *à tout point* M *du plan on fait correspondre le point* m *symétrique du point donné* I *par rapport à la droite qui joint les projections* P *et* Q *du point* M *sur les axes* Ox *et* Oy.

Il s'agit d'abord d'obtenir les coordonnées de chacun des points M et m en fonction des coordonnées de l'autre point.

Nous désignerons par a, b les coordonnées du point I, par x, y et X, Y les coordonnées des points m et M.

1. *Formules de transformation.* — On trouve de suite les deux relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x+a}{X} + \frac{y+b}{Y} - 2 = 0, \\ &\frac{y-b}{X} - \frac{x-a}{Y} \qquad = 0, \end{aligned} \right.$$

qui sont du premier degré par rapport à x et y d'une part, à $\frac{1}{X}$ et $\frac{1}{Y}$ d'autre part; on en tire les formules cherchées

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{x^2+y^2-a^2-b^2}{2(x-a)}, \\ Y &= \frac{x^2+y^2-a^2-b^2}{2(y-b)}, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x-a &= \frac{2Y(XY-bX-aY)}{X^2+Y^2}, \\ y-b &= \frac{2X(XY-bX-aY)}{X^2+Y^2}. \end{aligned} \right.$$

Comme on pouvait le prévoir géométriquement, non seulement x et y s'expriment rationnellement en X et Y, mais encore X et Y sont rationnels en x et y : la transformation est birationnelle.

Pour étudier cette transformation, il nous sera commode de dire que le point (x, y) se déplace dans un plan xOy et le point (X, Y) dans un plan XOY, en supposant que les plans ont été superposés de façon que OX et OY coïncident respectivement avec Ox et Oy.

A une droite

$$UX + VY + W = 0$$

décrite par le point M dans le plan XOY correspond dans le plan xOy la courbe

$$(\gamma)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)[U(y-b) + V(x-a)] \\ &\qquad\qquad + 2w(x-a)(y-b) = 0. \end{aligned} \right.$$

De même, à une droite

$$u(x-a) + v(y-b) + w = 0,$$

décrite par le point m dans le plan xOy, correspond dans le plan XOY la courbe

$$(\Gamma)\quad (XY - bX - aY)(uY + vX) + \frac{1}{2}w(X^2 + Y^2) = 0.$$

Les courbes (γ) et (Γ) sont d'un même degré (cette coïncidence se produit dans toute transformation birationnelle). C'est ce degré qui sert à définir l'ordre de la transformation; la transformation considérée ici est du troisième ordre.

2. *Points fondamentaux.* — Les courbes (γ) correspondant aux droites du plan XOY forment un réseau; toutes les courbes de ce réseau ont en commun un point double et quatre points simples; le point double a pour coordonnées a et b; les points simples sont définis par

$$\left\{ \begin{aligned} x &= a, \\ y &= -b, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= -a, \\ y &= b, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned} \right.$$

De même toutes les courbes (Γ) qui correspondent aux droites du plan xOy ont en commun un point double et quatre points simples : le point double est l'origine, les quatre points simples sont définis par

$$\begin{cases} XY = 0, \\ Z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} XY - bX - aY = 0, \\ X^2 + Y^2 = 0, \end{cases}$$

en écartant la solution $X = 0$, $Y = 0$ qui correspond au point double.

On appelle *points fondamentaux* du plan xOy les points communs à toutes les courbes (γ), points fondamentaux du plan XOY les points communs à toutes les courbes (Γ).

Remarquons que, si l'on assujettit une cubique à admettre un point donné comme point double et quatre points donnés comme points simples, l'équation de la cubique est de la forme

$$Uf + V\varphi + W\psi = 0,$$

U, V, W désignant des paramètres arbitraires; de plus, deux de ces cubiques se coupent en un seul point non situé aux points donnés [*voir*, pour le cas général, SALMON, *Traité de Géométrie analytique* (courbes planes), traduit par Chemin, p. 439, 440 et 441].

Lignes fondamentales. — Cherchons si le point M tend vers une position limite quand le point m se rapproche de l'un des points fondamentaux du plan xOy, en se déplaçant sur une courbe déterminée qui passe par ce point. Considérons d'abord le point fondamental (a, b) qui est point double pour toutes les courbes (γ). Posons

$$y - b = t(x - a)$$

dans les formules (1), elles deviennent

$$2X = x + a + (y + b)t,$$
$$2Y = \frac{x + a + (y + b)t}{t},$$

puis supposons que, $x - a$ tendant vers zéro, t tende vers une limite t_1. On voit que X et Y ont respectivement pour limites

$$X_1 = a + bt_1,$$

$$Y_1 = b + \frac{a}{t_1}.$$

La position limite M_1 de M dépend de t_1, et le lieu de ces positions limites, quand t_1 varie, est la courbe du second ordre

$$(X - a)(Y - b) = ab \qquad \text{ou} \qquad XY - bY - aY = 0.$$

Cette courbe se nomme la *courbe fondamentale* correspondant au point fondamental (a, b).

Il est essentiel de remarquer que, si une droite du plan xOy passe par le point fondamental (a, b), la cubique (Γ) correspondante se décompose en deux lignes dont l'une est la conique fondamentale que nous venons de définir. En effet, si

$$u(x - a) + v(y - b) = 0$$

est la droite du plan xOy, la courbe (Γ) se réduit

$$(XY - bX - aY)(uY + vX) = 0.$$

On verrait de même que, au point fondamental $(a, - b)$ correspond la ligne fondamentale

$$Y = 0,$$

au point fondamental $(b, - a)$, la ligne fondamentale

$$X = 0,$$

aux deux points fondamentaux $(x^2 = y^2 = 0,\ z = 0)$ les deux lignes fondamentales

$$X^2 + Y^2 = 0.$$

3. Il est facile de voir que *tous les points d'une ligne fondamentale située dans le plan* XOY *doivent faire partie de la jacobienne du réseau des courbes* (Γ), *lieu des points doubles de ces courbes.*

Montrons-le pour la conique fondamentale qui correspond au point (a, b). La cubique (Γ), correspondant à une droite

$$u(x-a)+v(y-b)=0,$$

se décompose en une conique et une droite passant par O; elle admet comme points doubles les points communs à la conique et à la droite; or, quand $\frac{u}{v}$ varie, la conique reste fixe, la droite tourne autour de l'origine.

Donc tous les points de la conique fondamentale peuvent être considérés comme points doubles d'une cubique (Γ), ou encore tous les points de la conique

$$XY-bX-aY=0$$

font partie de la jacobienne du réseau des courbes (Γ). On pourrait répéter un raisonnement analogue pour chacune des lignes fondamentales

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad X^2+Y^2=0.$$

Or la jacobienne d'un réseau de cubiques est une courbe du sixième ordre.

Pour le réseau des courbes (Γ), elle doit donc se réduire à

$$XY(X^2+Y^2)(XY-bX-aY)=0.$$

Nous aurons plus tard une vérification de ce résultat en faisant le calcul qui donne le développement du jacobien pour le réseau des courbes (Γ).

4. *La transformation considérée du troisième ordre peut être remplacée par deux transformations quadratiques successives.*

En effet, les relations (1) entre les coordonnées des points correspondants m et M peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} p(x+a)+q(y+b)+2=0, \\ p(y-b)-q(x-a) \qquad =0; \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} p=-\dfrac{1}{X}, \\ q=-\dfrac{1}{Y}, \end{cases}$$

et l'on voit de suite que chacun des systèmes de relations (4) et (5) définit une transformation quadratique.

Nous allons nous servir de cette propriété pour obtenir simplement le jacobien du réseau des courbes (Γ). Si nous rendons homogène le premier membre de l'équation de (Γ) en remplaçant X et Y par $\frac{X}{Z}$ et $\frac{Y}{Z}$ et si nous le multiplions par Z^4 (ce qui a seulement pour effet de multiplier le jacobien par un facteur numérique et par une puissance de Z), nous pourrons écrire l'équation de (Γ) sous la forme

$$(\Gamma)\qquad u\,F(X,Y,Z)+v\,\Phi(X,Y,Z)+w\,\Psi(X,Y,Z)=0,$$

en posant

$$\begin{aligned} F(X,Y,Z) &= (XY-bXZ-ayZ)\,YZ, \\ \Phi(X,Y,Z) &= (XY-bXZ-ayZ)\,YZ, \\ \Psi(X,Y,Z) &= \tfrac{1}{2}[(XZ)^2+(YZ)^2]: \end{aligned}$$

enfin si nous faisons le changement de variables

$$p=-XZ,\qquad q=-YZ,\qquad r=XY.$$

l'équation de (Γ) devient

$$u\, f(p, q, r) + v\, \varphi(p, q, r) - w\, \psi(p, q, r) = 0\,;$$

en posant

$$f(p, q, r) = - (ap + bq - r)p,$$
$$\varphi(p, q, r) = - (ap - bq - r)q,$$
$$\psi(p, q, r) = \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2).$$

Mais, d'après une propriété des jacobiens qui est bien connue et d'ailleurs facile à vérifier, on a

$$J = \Delta . D$$

en désignant par J le jacobien des trois fonctions F, Φ, Ψ, par Δ celui des trois fonctions f, φ, ψ et par D celui des trois fonctions p, q, r.

Or ici l'on trouve de suite

$$D = 2XYZ,$$
$$\Delta = -(ap + bq + r)(p^2 + q^2);$$

on a donc, en remplaçant p, q, r par leurs valeurs et faisant ensuite $Z = 1$,

$$J = -2XY(X^2 + Y^2)(XY - bX - aY).$$

Ainsi la jacobienne du réseau des courbes (Γ) se compose des courbes fondamentales situées dans le plan XOY.

On démontre, en général, qu'une transformation birationnelle établissant une correspondance entre les points de deux plans peut être remplacée par une succession de transformations quadratiques (Salmon, *Courbes planes*, p. 450).

Pour l'étude de ces transformations et celle d'autres transformations établissant une correspondance birationnelle entre les points de deux courbes, on trouvera des renseignements dans l'Ouvrage plusieurs fois cité de Salmon, dans les *Leçons sur la Géométrie de Clebsch* (recueillies par Lindemann, traduites par A. Benoist, en particulier t. II, p. 192) et, plus tard, dans la *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, par Appell et Goursat (p. 256 et suiv.).