Nouvelles annales de mathématiques

R. Bricard

Sur l'arc de la lemniscate

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 150-161

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__150_1>

[F8fγ]

SUR L'ARC DE LA LEMNISCATE;

PAR M. R. BRICARD.

1. On sait depuis longtemps que, si deux points se déplacent sur une même lemniscate, de manière à limiter un arc de longueur constante, il existe une relation algébrique entre les coordonnées de ces deux points : l'invariabilité de longueur d'un arc de lemniscate se traduit en effet par une équation différentielle d'Euler, dont l'intégrale est algébrique.

Je me proposerai ici de préciser cette interprétation géométrique des propriétés de l'équation d'Euler, c'est-à-dire de définir géométriquement la relation algébrique qui existe entre les extrémités d'un arc de lemniscate, de longueur constante : plusieurs des résultats énoncés ci-dessous (§§ 2 et 3) avaient déjà été obtenus par Chasles (1) et par M. Humbert (2). Il m'a semblé qu'il y avait quelque intérêt à les réunir en les faisant dépendre d'une même méthode.

Les théorèmes du § 5 me paraissent nouveaux.

(1) *C. R.*, 1845, p. 199.
(2) *J. M. P.*, 1895, p. 216.

2. Soient L une lemniscate de centre O, Ox et Oy les tangentes à cette courbe en son point double. On sait que l'inverse de L par rapport au point O est une hyperbole équilatère H, dont l'équation est

$$xy = \mathrm{K}.$$

On peut évidemment supposer $\mathrm{K} = 1$, pour un choix convenable de la puissance d'inversion.

Soient m, m' deux points infiniment voisins de L, μ et μ' les points correspondants de H. On a, par la considération des triangles semblables Omm', O$\mu'\mu$,

$$mm' = \mu\mu' \frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O}\mu'} = \mu\mu' \frac{\mathrm{O}m\,\mathrm{O}\mu}{\mathrm{O}\mu\,\mathrm{O}\mu'},$$

ou, en désignant par A^2 la puissance d'inversion,

$$mm' = \mathrm{A}^2 \frac{\mu\mu'}{\mathrm{O}\mu'},$$

en négligeant un infiniment petit du second ordre. Soient x, y les coordonnées du point μ, $x + dx$, $y + dy$ celles du point μ'. On a

$$\overline{\mu\mu'}^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) dx^2,$$

$$\overline{\mathrm{O}\mu}^2 = x^2 + y^2 = x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

L'arc infiniment petit de la lemniscate $mm' = dm$ a donc pour expression

$$dm = \mathrm{A}^2 \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \mathrm{A}^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Soient alors m et n deux points qui se déplacent sur L, de manière à limiter un arc de longueur constante,

μ et ν les points correspondant de H, x et ξ leurs abscisses respectives. Ces abscisses satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^4}}. \tag{1}$$

C'est l'équation d'Euler dont j'ai parlé au début de cette Note.

Remarquons que, l'hyperbole H ayant une asymptote parallèle à Oy, l'abscisse d'un point de H correspond d'une façon univoque à la position de ce point sur la courbe. Grâce à cette remarque, on peut appliquer immédiatement à l'équation (1) la méthode géométrique bien connue d'intégration de l'équation d'Euler, et l'on obtient le résultat suivant :

Soit $f(x, \xi) = 0$ *une intégrale de l'équation* (1). *Cette relation exprime que la droite joignant les points* μ *et* ν, *d'abscisses* x *et* ξ, *enveloppe une conique* C *rencontrant* H *aux points dont les abscisses sont racines de l'équation*

$$1 + x^4 = 0.$$

En ces points, les tangentes à H sont isotropes. On a, en effet,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

et, par suite, l'équation

$$1 + x^4 = 0$$

entraîne

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

La conique C rencontre donc H aux quatre points où la tangente est isotrope. Le point p, pôle de la corde $\mu\nu$, par rapport à H, décrit une conique polaire réciproque de C par rapport à H ; cette conique a les mêmes tangentes isotropes que H et lui est par conséquent homofocale.

On parvient donc à ce théorème, dû à Chasles :

Si les points m et n se déplacent sur la lemniscate L, *en limitant un arc de longueur constante, les tangentes à* H *aux points* μ *et* ν, *qui correspondent respectivement à m et à n, se coupent sur une certaine conique fixe, homofocale à* H.

3. De là résultent diverses conséquences :

Soient mn, $m'n'$ deux arcs égaux de la lemniscate L, et soient μ, ν, μ', ν' les points de H qui correspondent respectivement aux points m, n, m', n'. Les pôles, par rapport à H, des cordes $\mu\nu$, $\mu'\nu'$ se trouvent, d'après ce qui précède, sur une même conique homofocale à H. Il en résulte, en vertu d'un théorème de Chasles, que les tangentes à H aux points μ, ν, μ', ν' touchent un même cercle. Par suite, les inverses de ces tangentes, c'est-à-dire les quatre cercles passant en O et touchant la lemniscate aux points m, n, m', n', toucheront aussi un même cercle. Ainsi :

Si deux arcs de la lemniscate sont égaux, les quatre cercles qui passent par le centre et qui touchent respectivement la courbe aux extrémités de ces deux arcs sont tangents à un même cercle (¹).

Pour obtenir un nouvel énoncé remarquons que, sans modifier aucun des résultats précédents, on peut évidem-

(¹) Humbert, *loc. cit.*

ment supposer que les courbes L et H ont les mêmes sommets. Dans ces conditions, L est non seulement une inverse, mais encore la podaire de H par rapport au centre O. Si le point m, qui correspond par inversion au point μ de H, est en même temps la projection du point O sur la tangente à H au point μ_1, les deux points μ et μ_1 sont symétriques par rapport à l'un des axes de H.

Ces propositions sont bien connues, et je ne m'arrêterai pas à leur démonstration, d'ailleurs des plus simples.

D'après cela, si un arc mn de la lemniscate varie en conservant une longueur constante, il y aura la même relation entre les points μ_1 et ν_1 de H, tels que les projections du centre O sur les tangentes en ces points soient les points m et n, qu'entre les points μ et ν, dont il a été question tout à l'heure : les tangentes en μ_1 et ν_1 se couperont sur une conique homofocale à P. Rappelons encore que les foyers de H sont les symétriques du centre O par rapport aux foyers de la lemniscate ([1]). On a donc le théorème suivant :

Si deux points m et n se déplacent sur une lemniscate de centre O *en limitant un arc de longueur constante, le point t, commun aux perpendiculaires élevées aux points m et n aux droites* Om *et* On, *respectivement, décrit une conique ayant pour foyers les symétriques du point* O *par rapport aux foyers de la lemniscate.*

On peut dire encore que *le centre du cercle qui passe par les points* O, m, n *se déplace sur une conique ayant les mêmes foyers que la lemniscate*. Ce théorème avait

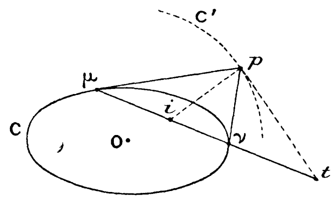
([1]) Les asymptotes isotropes de la lemniscate sont inflexionnelles, et cette courbe n'a pour cette raison que quatre foyers qui sont en même temps foyers ordinaires et foyers singuliers.

encore été énoncé, sous une forme un peu différente, par M. Humbert ([1]).

4. J'arrive à la démonstration géométrique du théorème énoncé à la fin du n° 2. J'établirai d'abord le théorème suivant :

Soient C *et* C′ *deux coniques homofocales* (*fig.* 1).

Fig. 1.



D'un point p *de la conique* C′ *on mène à* C *des tangentes dont les points de contact sont* μ *et* ν. *Si le point* p *se déplace infiniment peu sur* C′, *on a, entre les déplacements infiniment petits* $d\mu$ *et* $d\nu$ *des points* μ *et* ν *sur la conique* C *la relation suivante :*

$$\frac{d\mu}{\overline{O\mu'}^2} = \frac{d\nu}{\overline{O\nu'}^2}, \tag{2}$$

$O\mu'$ *et* $O\nu'$ *étant les demi-longueurs des diamètres conjugués respectivement aux diamètres* $O\mu$ *et* $O\nu$ *dans la conique* C.

Imaginons en effet que le point p se déplace sur C′. $\mu\nu$ enveloppe alors une conique C″, polaire réciproque de C′ par rapport à C. Le point de contact i de $\mu\nu$ avec C″

([1]) *Loc. cit.*, p. 217.

est le pôle, par rapport à C, de la tangente pt à C′ et, par conséquent, le conjugué harmonique par rapport à $\mu\nu$ du point t, où cette droite est rencontrée par la tangente pt. Or, pt est, comme l'on sait, l'une des bissectrices de l'angle $\mu p \nu$: pi est donc l'autre bissectrice du même angle.

Soient μ_1 et ν_1 les positions occupées par les points μ et ν, par suite du déplacement infinitésimal du point p. On a

$$\mu\mu_1 = d\mu, \qquad \nu\nu_1 = d\nu;$$

les droites $\mu\nu$ et $\mu_1\nu_1$ se coupent au point i dont je viens d'indiquer la détermination.

Comparons les aires des deux triangles infiniment petits $i\mu\mu_1$, $i\nu\nu_1$. Les hauteurs issues du point i sont égales. On a donc

$$\frac{\text{aire } i\mu\mu_1}{\text{aire } i\nu\nu_1} = \frac{\mu\mu_1}{\nu\nu_1} = \frac{d\mu}{d\nu}.$$

Ce même rapport est encore égal à $\dfrac{i\mu, i\mu_1}{i\nu, i\nu_1}$, c'est-à-dire, à un infiniment petit près, à $\dfrac{\overline{i\mu}^2}{\overline{i\nu}^2}$. On a donc

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{\overline{i\mu}^2}{\overline{i\nu}^2} = \frac{\overline{p\mu}^2}{\overline{p\nu}^2}.$$

Or le rapport $\dfrac{p\mu}{p\nu}$ est égal à $\dfrac{O\mu'}{O\nu'}$, en vertu d'une propriété classique des coniques (évidente sur l'ellipse, considérée comme projection du cercle).

Le théorème énoncé est donc établi.

Supposons maintenant que la conique C soit une hyperbole équilatère. Dans une telle courbe, deux diamètres conjugués quelconques ont même longueur. On peut donc écrire, en ce cas,

$$\frac{d\mu}{\overline{O\mu}^2} = \frac{d\nu}{\overline{O\nu}^2}.$$

Si m et n sont les points de la lemniscate inverse de l'hyperbole équilatère par rapport à son centre, on a, comme on l'a vu au début du n° 2,

$$dm = \frac{d\mu}{\overline{O\mu}^2}, \qquad dn = \frac{d\nu}{\overline{O\nu}^2}.$$

Par suite

$$(3) \qquad dm = dn.$$

Cette égalité permet d'énoncer la réciproque du théorème démontré analytiquement au n° 2.

Il faut remarquer toutefois que la relation (3) n'est vraie qu'en valeur absolue pour les différents cas qui peuvent se présenter. Le lecteur fera aisément la discussion nécessaire, et je me contenterai d'en énoncer le résultat final :

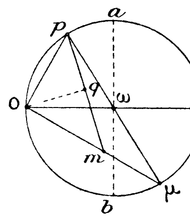
Si le point p décrit une conique C′ homofocale à H, *les points m et n décrivent sur la lemniscate des arcs de même longueur, mais l'arc mn n'est de longueur constante que si la conique C′ est une hyperbole. Si la conique C′ est une ellipse, le milieu de l'arc mn occupe une position fixe.*

5. Jusqu'ici j'ai considéré la lemniscate comme inverse ou comme podaire d'une hyperbole équilatère. Je me servirai dans ce qui suit d'un autre mode de génération, qui conduit, pour l'addition et la division des arcs, à

des constructions plus avantageuses que celles qu'on tire des théorèmes précédents.

Soient donnés un cercle C de centre ω (*fig.* 2), O un

Fig. 2.



point de ce cercle; $p\mu$ étant un diamètre variable, on détermine sur la droite $O\mu$ un point m tel que

$$pm = O\omega\sqrt{2}.$$

Le lieu du point m est une lemniscate de centre O.

Posons, en effet,

$$\widehat{\omega O \mu} = \varphi, \qquad Om = \rho, \qquad O\omega = 1.$$

On a

$$\rho^2 = \overline{pm}^2 - \overline{Op}^2 = 2 - 4\sin^2\varphi = 2\cos 2\varphi,$$

ce qui est bien l'équation en coordonnées polaires de la lemniscate.

Si l'on appelle q le milieu de pm, le quadrilatère $O\omega pq$ a ses côtés de longueurs invariables. On retrouve ainsi un mode connu de description de la lemniscate au moyen d'un quadrilatère articulé (Cayley).

L'arc infiniment petit de la lemniscate est donné par

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = \frac{2\,d\varphi^2}{\cos 2\varphi},$$

et si l'on pose

$$\tan\!g\,\varphi = t.$$

d'où $\cos 2\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\varphi = \frac{dt}{1+t^2}$,

$$ds^2 = \frac{2\,dt^2}{1-t^4}.$$

Les paramètres t et u qui correspondent aux extrémités d'un arc mn de longueur constante satisferont donc à l'équation d'Euler

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Or, le paramètre t correspond d'une façon univoque à la position du point μ sur le cercle C. Soit ν le point qui correspond au point n.

En raisonnant comme au n° 2, on voit que la droite $\mu\nu$ enveloppe une conique C′ rencontrant C aux points dont les paramètres ont les valeurs

$$\pm 1, \quad \pm i.$$

racines de l'équation

$$1 - t^4 = 0.$$

On reconnait immédiatement que C′ *est un cercle qui rencontre* C *aux points a et b, extrémités du diamètre perpendiculaire à* Oω.

La réciproque de ce théorème devra s'énoncer ainsi :

Aux points μ et ν du cercle correspondent respectivement deux points m et m' et deux points n et n' de la lemniscate; si une corde $\mu\nu$ du cercle varie en enveloppant un cercle qui passe aux points a et b, les quatre points m, m', n, n' décrivent des arcs égaux en valeur absolue. Deux des arcs mn, mn', $m'n$, $m'n'$ sont de longueurs constantes. Les deux autres ont leurs milieux fixes.

Ce théorème permet de résoudre aisément les problèmes relatifs au transport et à l'addition des arcs. Il fournit aussi une construction simple du point milieu d'un arc donné de la lemniscate.

Soient mn l'arc donné, m' et n' les points diamétralement opposés à m et n, μ et ν les points correspondant à ces points sur le cercle. Il existe deux cercles C′ et C″ tangents à $\mu\nu$ et passant par les points a et b.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les quatre points de contact avec C des tangentes communes (réelles) à C et C′ d'une part, C et C″ de l'autre. A ces points correspondent sur la lemniscate huit points $l_1, l'_1, \ldots, l_4, l'_4$. *Ce sont les points milieux des huit arcs de la lemniscate ayant pour cordes mn, mn', $m'n$, $m'n'$.*

Ce résultat est évident, après les développements qui précèdent.

6. On pourrait ajouter quelques propositions qui découlent de l'application du théorème de Poncelet aux cercles C et C′. Je me contenterai d'indiquer un cas particulier du théorème démontré au début du n° 5 :

Si le cercle C′ *a son centre en* O, *le plus petit des arcs mn correspondant à la corde $\mu\nu$ est égal au quart du périmètre de la lemniscate.*

On peut encore, par une construction un peu plus compliquée, déterminer le cercle C′ de manière que l'arc mn soit égal au tiers du périmètre de la lemniscate.

Je rappellerai, en terminant, le beau théorème qu'Abel a obtenu en appliquant les méthodes employées par Gauss pour résoudre l'équation binome à la division des périodes des fonctions elliptiques :

Le périmètre de la lemniscate est divisible en

n parties égales, par la règle et le compas, pour les valeurs de n qui rendent possible le problème analogue relatif au cercle ($n = 2^k q q' q'' \ldots$; q, q', q'' étant des nombres premiers de la forme $2^r + 1$).