Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 139-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__139_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1869.

(1900, p. 432.)

Étant données quatre divisions proportionnelles portées par quatre droites quelconques de l'espace, on considère les tétraèdres ayant pour sommets les points homologues de ces divisions. Si deux de ces tétraèdres sont semblables, tous les autres sont semblables deux à deux.

(E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. G. FONTENÉ.

Soient, dans l'espace, deux segments AA_1 et BB_1, avec

$$(1) \qquad \frac{BB_1}{AA_1} = \sigma;$$

si l'on partage AB et A_1B_1 en C et C_1 dans un même rapport

$$(2) \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1A_1}} = k,$$

on a (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 416)

$$\begin{aligned}(1+k)^2\overline{CC_1}^2 &= k^2\overline{AA_1}^2 + \overline{BB_1}^2 + 2k\overline{AA_1}\,\overline{BB_1}\cos(AA_1, BB_1)\\ &= \overline{AA_1}^2[k^2+\sigma^2+2k\sigma\cos(AA_1, BB_1)]\\ &= k\sigma\overline{AA_1}^2\left[\frac{k}{\sigma}+\frac{\sigma}{k}+2\cos(AA_1, BB_1)\right];\end{aligned}$$

en prenant les points D et D_1 pour un rapport k' tel que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{k'}{\sigma} = \frac{\sigma}{k} \qquad \text{ou} \qquad kk' = \sigma^2,$$

on a donc

$$(4) \qquad \frac{(1+k)^2}{(1+k')^2}\frac{\overline{CC_1}^2}{\overline{DD_1}^2} = \frac{k}{k'}.$$

Soient alors $AA_1A_2A_3$ et $BB_1B_2B_3$ deux tétraèdres semblables, avec le rapport (1); si l'on partage AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 en C, C_1, C_2, C_3 d'une part, et D, D_1, D_2, D_3 d'autre part, de manière que l'on ait

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1A_1}} = \ldots = k, \qquad \frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{D_1A_1}} = \ldots = k',$$

k et k' *vérifiant la relation* (3), on a

$$\frac{CC_1}{DD_1} = \frac{CC_2}{DD_2} = \frac{CC_3}{DD_3} = \frac{C_1C_2}{D_1D_1} = \ldots,$$

c'est-à-dire que les deux tétraèdres (C) et (D) ont leurs arêtes proportionnelles; comme ils dérivent d'une manière continue des tétraèdres semblables (A) et (B), ils sont semblables.

Si les deux tétraèdres (A) *et* (B) *sont égaux, les deux tétraèdres d'un couple quelconque* (C), (D) *le sont aussi;* on a en effet

$$\frac{CC_1}{DD_1} = \frac{\sqrt{k'} + \dfrac{1}{\sqrt{k'}}}{\sqrt{k} + \dfrac{1}{\sqrt{k}}},$$

et ce rapport est égal à 1 si l'on a $kk' = 1$, ou $\sigma = 1$.

1874.

(1900, p. 528.)

Soient P *et* Q *les points de contact de deux tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements qui se rencontrent à angle droit en* M. *Montrer que :* 1° *la hauteur et l'hypoténuse du triangle* MPQ *sont également tangentes à l'hypocycloïde;* 2° *le lieu du pied de la hauteur est une circonférence de cercle.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soient 1 le rayon du cercle mobile, 3 celui du cercle fixe; désignons par t l'angle variable que fait avec l'axe des X le rayon vecteur joignant l'origine, centre du cercle fixe, au centre du cercle mobile, la courbe sera représentée par les relations

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} y = 2\sin t - \sin 2t, \\ x = 2\cos t - \cos 2t. \end{cases}$$

Par les deux points P et Q dont les coordonnées, tirées de (A), correspondent aux valeurs t et $\pi + t$ de l'angle variable, nous menons les deux tangentes

$$y\cos\frac{t}{2} + x\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{3}{2}t,$$

$$y\sin\frac{t}{2} - x\cos\frac{t}{2} = \cos\frac{3}{2}t.$$

qui se coupent normalement au point M, dont les coordonnées sont

$$y = \sin 2t, \qquad x = -\cos 2t.$$

La droite PQ joignant les points de contact de ces deux tangentes a pour équation

$$y \cos t - x \sin t = -\sin 3t;$$

on voit qu'elle touche la courbe au point $(-2t)$.

La perpendiculaire abaissée de M sur PQ

$$y \sin t + x \cos t = -\cos 3t$$

touche l'hypocycloïde au point $(\pi - 2t)$.

2° Le lieu des rencontres de ces deux dernières droites, qui est aussi le lieu des points M, est le cercle

$$y^2 + x^2 = 1.$$

Un abonné nous écrit :

« La question 1874 est bien connue. *Voir* Cremona, *Journal de Crelle*, t. 64; Painvin, *Nouvelles Annales*, 1860, p. 260. »

1875.

(1900, p. 528.)

Calculer la limite de l'expression

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^3}}$$

pour n infini. (E. Weill.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soit m un nombre quelconque entier ou non, mais positif, plus grand que un. On a, n étant entier et positif, l'identité

$$n^{\frac{m+1}{m}} - 1 = \sum_{1}^{n-1} \left[(x+1)^{\frac{m+1}{m}} - x^{\frac{m+1}{m}} \right].$$

Le développement de $(x+1)^{\frac{m+1}{m}}$ par la série de Taylor arrêtée au troisième terme donne

$$(x+1)^{\frac{m+1}{m}} - x^{\frac{m+1}{m}} = \frac{m+1}{m} x^{\frac{1}{m}} + \frac{m+1}{2m}\,\frac{1}{m}\,\frac{1}{(x+\theta)^{\frac{m-1}{m}}}.$$

Le dernier terme, θ étant positif et inférieur à l'unité et x positif, sera toujours lui-même inférieur à 1 et positif.

Soit E la moyenne arithmétique des $(n-1)$ valeurs de ce terme correspondant à celles de x de 1 à $n-1$; nous pouvons écrire

$$n^{\frac{m+1}{m}} = 1 = \sum_{1}^{n-1} \frac{m+1}{m} x^{\frac{1}{m}} + (n-1)\mathrm{E}.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $n^{\frac{m+1}{m}}$ on aura

$$1 - \frac{1}{n^{\frac{m+1}{m}}} = \frac{\frac{m+1}{m}\sum_{1}^{n-1} x^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{m+1}{m}}} + \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{m}}} - \frac{1}{n^{\frac{m+1}{m}}}\right)\mathrm{E},$$

et à la limite pour n infini

$$\frac{\sum_{1}^{n-1} x^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{m+1}{m}}} = \frac{m}{m+1};$$

pour m $= 2$, la limite serait $\frac{2}{3}$.

Autres solutions très simples de M^lle^ PAULA KLEKLER et de M^lle^ AMÉLIE POLLAK, en employant des intégrales définies.

1879.

(1900, p. 571.)

La tangente en un point M *d'une conique à centre coupe les axes en* A *et* B, *la normale au même point les rencontre en* A′ *et* B′; *soit m le centre de courbure du point* M.

Démontrer que

$$\frac{mA'}{mB'} = \frac{MA}{MB},$$

et déduire de cette propriété une construction simple du centre de courbure. (DROZ-FARNY.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Si C est l'intersection des droites AB', A'B (¹), l'angle MCm est droit, d'après un théorème de Steiner (*Journal de Crelle*, t. 30, p. 271), donc les angles mCB', MCB sont égaux et la proportion est démontrée. La construction plus simple du point m, qui en découle, est donc une des deux données par Steiner (*loc. cit.*) : « La perpendiculaire à MC menée par l'intersection de AB' et A'B coupe la normale au point cherché. »

On peut démontrer le théorème de Steiner en observant que la parabole qui touche la normale et la tangente en M et les axes, a pour directrice la droite qui unit M au centre, et C pour foyer, m est donc bien le point de contact de la normale avec la parabole, c'est-à-dire le centre de courbure au point M.

Autre solution de M. E.-N. BARISIEN.