J. RÉVEILLE

Note sur un système articulé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 127-132
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__127_1>

[R1e]

NOTE SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ;

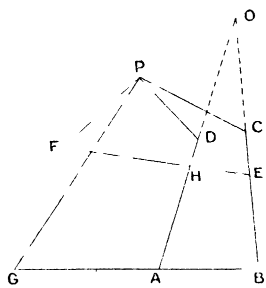
PAR M. J. RÉVEILLE.
Professeur d'Hydrographie.

On doit à M. Hart, outre son inverseur, un système articulé qui avec cinq tiges permet de décrire une circonférence ou une droite. Ce système a été étudié, en particulier, par M. Darboux (Notes à la *Mécanique* de Despeyrous) et par M. Kœnigs (*Cinématique*). Les développements de calcul qui forment la théorie de cet appareil contrastent avec la simplicité des résultats auxquels on aboutit; et M. Darboux a remarqué lui-même que la théorie est un peu longue pour un résultat extrêmement simple.

Voici une théorie purement géométrique qui me paraît avoir de plus l'avantage de mettre en lumière pour certains points de la figure un caractère de réciprocité assez remarquable.

Soit le pentagone articulé ABDPC (*fig.* 1); fixons

Fig. 1.



son côté AB, et assujettissons-le à cette condition géométrique que les angles C et D restent toujours égaux. Le point P décrit alors un cercle dont le centre G est sur AB, et tel que l'on ait

$$\frac{GA}{GB} = \frac{PD.DA}{PC.CB}. \tag{1}$$

On peut donc réaliser la condition d'égalité des angles en réunissant le point P au point G par une tige PG de longueur convenable.

Je prends maintenant sur BC un point E tel que l'on ait $\frac{PC}{CE} = \frac{AD}{PD}$, et j'articule en P et E deux tiges PF et EF articulées entre elles en F, et telles que l'on ait

$$\frac{EF}{PG} = \frac{PF}{AG} = \frac{EC}{PD} = \frac{PC}{DA}.$$

En vertu de ces proportions, et comme les angles D et C sont égaux, le quadrilatère PCEF est semblable au quadrilatère ADPG, et les angles F et G sont égaux.

Soit H l'intersection des droites DA et EF; comparons les deux quadrilatères PDHF et BCPG. Ils ont leurs angles égaux chacun à chacun. En effet, les angles D et C sont égaux, ainsi que les angles F et G. D'ailleurs, l'angle FPD est égal à l'angle B, car cet angle FPD est égal à l'angle FPC diminué de l'angle DPC; mais on trouve la même mesure pour l'angle B dans le triangle ABO obtenu en prolongeant les côtés AD et BC.

Remarquons de plus que la similitude des quadrilatères PCEF et ADPG donne la relation

$$\frac{PF}{GA} = \frac{PC}{DA}. \tag{2}$$

Multipliant les relations (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{PF}{GB} = \frac{PD}{CB};$$

les deux quadrilatères PDHF et BCPG sont donc aussi semblables. Il en résulte que les longueurs DH et FH, et par conséquent aussi AH et HE, sont invariables, et l'on peut articuler les tiges AD et FE au point H sans gêner le mouvement du système articulé.

La nouvelle liaison introduite permet d'en supprimer d'autres, par exemple PG et PC; on a alors le système formé par les deux quadrilatères articulés ABHE et PDHF qui fait décrire un cercle au point P. Si l'on supprime PF et PG, on obtient le système articulé de Hart, qui réalise l'égalité des angles D et C par la tige HE; et le point P décrit un cercle de centre G. Si l'on fixe la tige HE, le point P décrit un cercle de centre F.

Conservant les tiges PF et PG, et supprimant les tiges PC et PD, si l'on fixe AH, le point P décrit un cercle de centre D; et si l'on fixe BE, il décrit un cercle de centre C. Ainsi les quatre points F, G, D, C jouent les uns par rapport aux autres des rôles réciproques.

Il est facile de voir que l'on a

$$\frac{FH}{HE} = \frac{GA}{AB} \qquad \text{et} \qquad \frac{DH}{HA} = \frac{CE}{EB};$$

et l'on a vu que

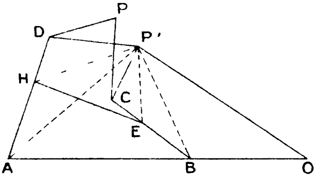
$$\frac{GA}{GB} = \frac{PD.DA}{PC.CB}.$$

Si donc on choisit les quatre tiges PD, DA, PC, CB de manière que le rapport $\frac{PD.DA}{PC.CB}$ soit égal à 1, le point G et aussi le point F sont à l'infini; la figure précédente n'existe plus, mais on voit par continuité que le point P décrira une droite perpendiculaire à AB. Son mouvement est réalisé au moyen des cinq tiges PD, DA, PC, CB, HE; et l'on a l'appareil à ligne droite de Hart.

Voici d'ailleurs comment on peut traiter directement le cas où le point P décrit une droite.

Soit un couple de deux tiges AD, DP′ (*fig.* 2) arti-

Fig. 2.



culées ensemble au point D, l'extrémité A étant un point fixe d'articulation; et un autre couple de deux tiges BC, CP′ articulées ensemble au point C, le point d'articulation B étant fixe comme le point A. Les tiges $P'D$ et $P'C$ sont articulées au point P' qui est relié par une tige $P'O$ au point fixe O de la droite AB.

Les longueurs des tiges sont telles que

$$\frac{AD}{DP'} = \frac{BC}{CP'}, \tag{1}$$

et le point O ainsi que la tige OP' sont choisis de telle sorte que le point P' décrive le cercle lieu des points dont les distances $P'A$ et $P'B$ aux deux points A et B soient dans le rapport $\frac{P'A}{P'B} = \frac{AD}{BC} = \frac{P'D}{P'C}$.

Dans le mouvement du système à un paramètre ainsi défini, les triangles $P'DA$, $P'CB$ restent semblables, et les angles $P'DA$, $P'CB$ restent égaux.

Articulons en C une tige $PC = P'D$, et en D une tige $PD = P'C$, ces deux nouvelles tiges s'articulant en P; il est aisé de voir que le point P décrit une droite perpendiculaire à AB. En effet, les angles D et C du contre-parallélogramme $PDP'C$ étant égaux, il en est de même des angles PDA et PCB. On a d'ailleurs

$$\overline{PA}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{DA}^2 - 2\,PD.DA\cos PDA,$$
$$\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\,PC.PB\cos PCB.$$

Or les angles PDA et PCB sont égaux, et en vertu de (1) on a

$$PD.DA = PC.CB;$$

donc la différence $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2$ est constante.

Nous avons ainsi construit un nouvel appareil à ligne droite, mais on peut le simplifier et en déduire celui de Hart.

Pour cela, prenons sur DA un point H tel que le triangle $P'DH$ soit semblable au triangle $P'DA$, et sur CB un point E tel que le triangle P′CE soit semblable au triangle P′CB. On a

$$\frac{P'D}{DH} = \frac{AD}{P'D},$$

d'où

$$DH = \frac{\overline{P'D}^2}{AD} = \frac{\overline{PC}^2}{AD};$$

de même

$$CE = \frac{\overline{P'C}^2}{BC} = \frac{\overline{PD}^2}{BC}.$$

Joignons HE; les points HE étant homologues dans les deux triangles semblables P′DA, P′CB, le triangle P′HE est semblable au triangle P′AB, et l'on a

$$\frac{HE}{AB} = \frac{P'H}{P'A} = \frac{P'D}{DA} = \frac{PC}{DA}.$$

Donc HE est constant, et nous pouvons remplacer la liaison formée par les tiges DP′, P′C, P′O par une nouvelle liaison formée avec la tige HE reliant les points HE déterminés comme il a été dit.