

EUGÈNE FABRY

**Sur une formule fondamentale des
fonctions elliptiques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 114-123

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__114_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[F2e]

SUR UNE FORMULE FONDAMENTALE DES FONCTIONS
ELLIPTIQUES;

PAR M. EUGÈNE FABRY.

Dans le *Traité de Greenhill (Sur les fonctions elliptiques et leurs applications)* on trouve, aux exercices proposés à la fin du Chapitre VI, l'intégrale

$$(1) \quad I = \int_{e_2}^{e_1} \int_{e_3}^{e_2} \frac{(x-y) dx dy}{\sqrt{-16(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \frac{\pi}{2},$$

où $e_1 > x > e_2 > y > e_3$.

La valeur de cette intégrale double se déduit des propriétés des fonctions $p(u)$, $\zeta(u)$, et de la relation

$$(2) \quad \delta = \tau_1 \omega' - \omega \tau_1' = \pm \frac{\pi i}{2},$$

où $\tau_1 = \zeta(\omega)$, $\tau_1' = \zeta(\omega')$, le signe \pm étant celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

Inversement, on peut calculer directement la valeur de l'intégrale (1), sans employer les fonctions elliptiques, et en déduire une démonstration de la formule (2).

En supposant toujours e_1, e_2, e_3 réels, $e_1 > e_2 > e_3$, faisons la substitution

$$x = e_2 + X, \quad y = e_2 - Y.$$

En posant

$$e_1 - e_2 = a, \quad e_2 - e_3 = b,$$

on a

$$I = \int_0^a \int_0^b \frac{(X + Y) dX dY}{4\sqrt{XY}(a - X)(a + Y)(b + X)(b - Y)}.$$

Faisons la nouvelle substitution

$$XY = u, \quad Y - X = v,$$

de déterminant différentiel

$$\frac{D(u, v)}{D(X, Y)} = X + Y.$$

Si le point (X, Y) décrit les axes, entre les points $(0, b)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$, c'est-à-dire si l'on a $X = 0$, Y variant de b à 0 ; puis $X = 0$, Y variant de 0 à a ; on aura

$$u = 0,$$

v variant de b à 0 puis à $-a$.

Pour $X = a$, Y variant de 0 à b , on a

$$u - av = a^2,$$

u variant de 0 à ab .

Pour $Y = b$, X variant de 0 à a , on a

$$u + bv = b^2,$$

u variant encore de 0 à ab .

Les points (X, Y) intérieurs au rectangle d'intégration, de côtés a, b , correspondent à des points (u, v) intérieurs au triangle dont les côtés ont pour équations

$$u = 0, \quad u - av = a^2, \quad u + bv = b^2.$$

Les sommets de ce triangle sont les points

$$(u = 0, v = -a), \quad (u = 0, v = b), \quad (u = ab, v = b - a).$$

L'intégrale double devient ainsi

$$I = \int_0^{ab} \int_{\frac{u}{a}-a}^{b-\frac{u}{b}} \frac{du dv}{4 \sqrt{u(a^2-u+av)(b^2-u-bv)}}.$$

Or on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \left(2 \operatorname{arc tang} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} \right)_{\alpha}^{\beta} = \pi \quad (\alpha < \beta),$$

et

$$\int_{\frac{u}{a}-a}^{b-\frac{u}{b}} \frac{dv}{\sqrt{(a^2-u+av)(b^2-u-bv)}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}.$$

Par suite

$$I = \int_0^{ab} \frac{\pi du}{4 \sqrt{abu}} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour en déduire la valeur de l'expression (2), supposons ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs. On a

$$e_1 = p(\omega), \quad e_2 = p(\omega + \omega'), \quad e_3 = p(\omega'),$$

$$2\omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

$$2\omega' = i \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$2\eta = \zeta(u + 2\omega) - \zeta(u)$$

$$= - \int_{\omega}^{\omega'+2\omega} p(u) du = - \int_{e_3}^{e_2} \frac{y dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

$$2\eta' = \zeta(u + 2\omega') - \zeta(u)$$

$$= - \int_{\omega}^{\omega'+2\omega'} p(u) du = -i \int_{e_2}^{e_1} \frac{x dx}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\eta\omega' - \omega\eta'$$

$$= \frac{i}{i} \int_{e_2}^{e_1} \int_{e_3}^{e_2} \frac{(x-y) dx dy}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \frac{\pi i}{2}.$$

On peut remarquer que la fonction $p(u)$ suppose $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, mais la valeur de l'intégrale (1) reste la même, quels que soient e_1, e_2, e_3 , pourvu que $e_1 > e_2 > e_3$.

Dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont imaginaires, la formule (2) peut encore se déduire de l'intégrale (1).

Si e_1, e_2, e_3 ont des rapports réels, soit

$$\frac{e_1}{\rho_1} = \frac{e_2}{\rho_2} = \frac{e_3}{\rho_3} = e^{\theta i},$$

on peut poser

$$\begin{aligned} 2\omega &= \int_{e_3}^{e_1} \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} \\ &= e^{-\frac{\theta i}{2}} \int_{\rho_3}^{\rho_1} \frac{dy}{\sqrt{(y-\rho_1)(y-\rho_2)(y-\rho_3)}}, \\ 2\omega' &= \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \\ &= ie^{-\frac{\theta i}{2}} \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}}, \end{aligned}$$

$\frac{\omega'}{i\omega}$ étant supposé positif;

$$\begin{aligned} 2\tau_1 &= -e^{\frac{\theta i}{2}} \int_{\rho_3}^{\rho_2} \frac{y dy}{\sqrt{(y-\rho_1)(y-\rho_2)(y-\rho_3)}}, \\ 2\tau_1' &= -ie^{\frac{\theta i}{2}} \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{x dx}{\sqrt{-(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}}, \end{aligned}$$

$\tau_1\omega'$ et $\omega\tau_1'$ ne dépendent pas de θ , et $\tau_1\omega' - \omega\tau_1'$ se ramène à l'intégrale I.

Enfin, si e_1, e_2, e_3 n'ont pas de rapports réels, soit

$$e_1 = A + \operatorname{Re} x_1 i, \quad e_2 = A + \operatorname{Re} x_2 i, \quad e_3 = A + \operatorname{Re} x_3 i$$

et

$$x = A + \operatorname{Re} e^{ti}, \quad y = A + \operatorname{Re} e^{\theta i}.$$

Supposons

$$0 < \alpha_1 < t < \alpha_2 < \theta < \alpha_3 < 2\pi,$$

les points x et y décrivent alors la circonférence qui passe par les points e_1, e_2, e_3 . Pour préciser la valeur des radicaux, nous supposons qu'en passant de l'arc $e_1 e_2$ à l'arc $e_2 e_3$, on tourne autour du point e_2 en passant en dehors de la circonférence. Soit alors

$$\sqrt{y - e_1} = \sqrt{2R \sin \frac{\theta - \alpha_1}{2}} e^{\frac{\theta + \alpha_1 + \pi}{4} i},$$

$$\sqrt{y - e_2} = \sqrt{2R \sin \frac{\theta - \alpha_2}{2}} e^{\frac{\theta + \alpha_2 + \pi}{4} i},$$

$$\sqrt{y - e_3} = \sqrt{2R \sin \frac{\alpha_3 - \theta}{2}} e^{\frac{\theta + \alpha_3 - \pi}{4} i},$$

on en déduit

$$\sqrt{x - e_1} = \sqrt{2R \sin \frac{t - \alpha_1}{2}} e^{\frac{t + \alpha_1 + \pi}{4} i},$$

$$\sqrt{x - e_2} = \sqrt{2R \sin \frac{\alpha_2 - t}{2}} e^{\frac{t + \alpha_2 - \pi}{4} i},$$

$$\sqrt{x - e_3} = \sqrt{2R \sin \frac{\alpha_3 - t}{2}} e^{\frac{t + \alpha_3 - \pi}{4} i}.$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} 2\omega &= \int_{e_3}^{e_2} \frac{dy}{\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}} \\ &= e^{\frac{\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{e^{\frac{\theta}{4}} d\theta}{2 \sqrt{2R \sin \frac{\theta - \alpha_1}{2} \sin \frac{\theta - \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\omega' &= \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \\ &= e^{\frac{3\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{e^{\frac{t}{4}} dt}{2 \sqrt{2R \sin \frac{t - \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2 - t}{2} \sin \frac{\alpha_3 - t}{2}}}. \end{aligned}$$

Si l'on sépare les parties réelles et imaginaires, sous la forme $2\omega = a + bi$, $2\omega' = a' + b'i$, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i est $\frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2}$ et a le signe de

$$ab' - ba' = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{\cos \frac{\theta - t}{4} dt d\theta}{8R \sqrt{\sin \frac{t - \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2 - t}{2} \sin \frac{\alpha_3 - t}{2} \sin \frac{\theta - \alpha_1}{2} \sin \frac{\theta - \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}$$

qui est positif.

D'autre part

$$\begin{aligned} 2\eta &= - \int_{e_3}^{e_2} \frac{y dy}{\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}} \\ &= - e^{\frac{\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{(A + R e^{\theta i}) e^{\frac{\theta i}{4}} d\theta}{2 \sqrt{2R \sin \frac{\theta - \alpha_1}{2} \sin \frac{\theta - \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\eta' &= - \int_{e_2}^{e_1} \frac{x dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \\ &= - e^{\frac{3\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{(A + R e^{t i}) e^{\frac{t i}{4}} dt}{2 \sqrt{2R \sin \frac{t - \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2 - t}{2} \sin \frac{\alpha_3 - t}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \eta\omega' - \omega\eta' = \int_{e_2}^{e_1} \int_{e_3}^{e_2} \frac{(x - y) dx dy}{4 \sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}} \\ &= e^{-\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} i} \\ &\quad \times \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{(e^{\theta i} - e^{t i}) e^{\frac{t + \theta}{4} i} dt d\theta}{32 \sqrt{\sin \frac{t - \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2 - t}{2} \sin \frac{\alpha_3 - t}{2} \sin \frac{\theta - \alpha_1}{2} \sin \frac{\theta - \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}. \end{aligned}$$

Faisons la substitution

$$t = \alpha_2 - 2u, \quad \theta = \alpha_2 + 2v$$

et posons

$$x_2 - x_1 = 2a, \quad x_3 - x_2 = 2b,$$

a et b sont positifs,

$$a + b = \frac{x_3 - x_1}{2} < \pi.$$

$$\delta = i e^{(a-b)i} \int_0^a \int_0^b \frac{\sin(u+v) e^{\frac{v-u}{2}i} du dv}{4\sqrt{\sin u \sin v \sin(\alpha-u) \sin(\alpha+v) \sin(b+u) \sin(b-v)}}.$$

Faisons la nouvelle substitution

$$\sin u \sin v = X, \quad v - u = Y.$$

Le déterminant différentiel

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \sin(u+v).$$

Si le point (u, v) décrit les axes entre les points $(0, b)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$, c'est-à-dire si $u = 0$, v variant de b à 0 ; puis $v = 0$, u variant de 0 à a ; on a

$$X = 0,$$

Y variant de b à 0 et $-a$.

Lorsque $u = a$, v variant de 0 à b , on a

$$X = \sin a \sin(a + Y),$$

Y variant de $-a$ à $b - a$.

Lorsque $v = b$, u variant de 0 à a , on a

$$X = \sin b \sin(b - Y),$$

Y variant de b à $b - a$.

Les points (u, v) intérieurs au rectangle d'intégration, de côtés a , b , correspondent à des points intérieurs au triangle curviligne dont les côtés ont pour équations

$$X = 0, \quad X = \sin a \sin(a + Y), \quad X = \sin b \sin(b - Y).$$

et dont les sommets sont les points

$$\begin{aligned} (X = 0, Y = -a), \quad (X = 0, Y = b), \\ (X = \sin a \sin b, Y = b - a). \end{aligned}$$

On a donc

$$\delta = \frac{i}{4} e^{(a-b)t} \times \left[\int_{-a}^{b-a} \int_0^{\sin a \sin(a+Y)} + \int_{b-a}^b \int_0^{\sin b \sin(b-Y)} \frac{e^{\frac{3}{2} Y t} dY dX}{\sqrt{X(X - \sin a \sin(a-Y)) \times (X - \sin b \sin(b-Y))}} \right],$$

où les deux intégrales ne diffèrent que par les limites.

Dans la première, posons

$$X = \sin a \sin(\alpha + Y) \sin^2 \theta;$$

dans la seconde

$$X = \sin b \sin(b - Y) \sin^2 \theta.$$

On a

$$\delta = \frac{i}{2} e^{(a-b)t} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-a}^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2} Y t} dY d\theta}{\sqrt{\sin b \sin(b - Y) - \sin a \sin(\alpha + Y) \sin^2 \theta}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{b-a}^b \frac{e^{\frac{3}{2} Y t} dY d\theta}{\sqrt{\sin a \sin(\alpha + Y) - \sin b \sin(b - Y) \sin^2 \theta}} \right];$$

Or

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2} Y t} dY}{\sqrt{\sin b \sin(b - Y) - \sin a \sin(\alpha + Y) \sin^2 \theta}} \\ &= \left[\frac{-2 e^{\frac{Y t}{2}} \sqrt{\sin b \sin(b - Y) - \sin a \sin(\alpha + Y) \sin^2 \theta}}{e^{-bt} \sin b + e^{at} \sin a \sin^2 \theta} \right]_{-a}^{b-a} \\ &= 2 \frac{e^{-\frac{a}{2} t} \sqrt{\sin b \sin(\alpha + b)} - e^{\frac{b-a}{2} t} \sqrt{\sin a \sin b} \cos \theta}{e^{-bt} \sin b + e^{at} \sin a \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

la seconde intégrale s'en déduit par une simple permu-

tation

$$\begin{aligned}
 & - \int_b^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2}Y} dY}{\sqrt{\sin a \sin(a+Y) - \sin b \sin(b-Y) \sin^2 \theta}} \\
 & = 2 \frac{e^{\frac{b}{2}i} \sqrt{\sin a \sin(a+b)} - e^{\frac{b-a}{2}i} \sqrt{\sin a \sin b} \cos \theta}{e^{ai} \sin a + e^{-bi} \sin b \sin^2 \theta}.
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi, en intervertissant les termes

$$\begin{aligned}
 \delta & = -i e^{\frac{a+b}{2}i} \sqrt{\sin a \sin b} \\
 & \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sin a e^{(a+b)i} + \sin b \sin^2 \theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sin b + e^{(a+b)i} \sin a \sin^2 \theta} \right) \\
 & + i \sqrt{\sin(a+b)} \\
 & \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{a}{2}} \sqrt{\sin b} d\theta}{\sin b + e^{(a+b)i} \sin a \sin^2 \theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{bi}{2}} \sqrt{\sin a} d\theta}{\sin a + e^{-(a+b)i} \sin b \sin^2 \theta} \right).
 \end{aligned}$$

Posons dans la première intégrale

$$\sin \theta = x \sqrt{\frac{\sin a}{\sin b}},$$

dans la seconde

$$\sin \theta = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\sin b}{\sin a}},$$

dans la troisième

$$\text{tang} \theta = x \sqrt{\frac{\sin b}{\sin(a+b)}},$$

dans la quatrième

$$\text{tang} \theta = x \sqrt{\frac{\sin a}{\sin(a+b)}}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 \delta & = -i e^{\frac{a+b}{2}i} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + e^{(a+b)i}} \\
 & + i e^{-\frac{ai}{2}} \int_0^\infty \frac{dx}{e^{-ai} + x^2} + i e^{\frac{bi}{2}} \int_0^\infty \frac{dx}{e^{bi} + x^2};
 \end{aligned}$$

or

$$\int \frac{e^{\frac{\omega i}{2}} dx}{e^{\omega i} + x^2} = \frac{i}{2} \log \left(\frac{x + i e^{\frac{\omega i}{2}}}{x - i e^{\frac{\omega i}{2}}} \right)$$

$$= \frac{i}{4} \log \frac{1 + x^2 - 2x \sin \frac{\omega}{2}}{1 + x^2 + 2x \sin \frac{\omega}{2}} - \frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{2x \cos \frac{\omega}{2}}{x^2 - 1}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\omega i}{2}} dx}{e^{\omega i} + x^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad -\pi < \omega < \pi.$$

En prenant successivement pour ω les valeurs $a + b$,
 $-a, b$, on a

$$\delta = \frac{\pi i}{2}.$$

On pourrait, en changeant la valeur de

$$\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}$$

changer les signes de ω et η , alors δ et le coefficient
de i dans $\frac{\omega'}{\omega}$ changent de signes en même temps.