M. D'OCAGNE

Sur la courbe radiale de Houël

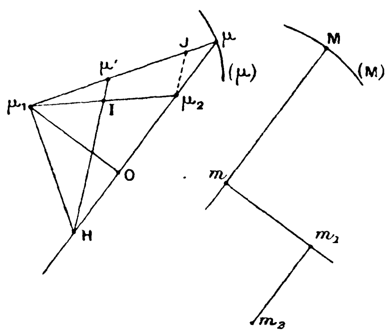
Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 112-114
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__112_0>

[O2q]

SUR LA COURBE RADIALE DE HOUËL;

Par M. M. d'Ocagne.

Si, par un pôle O, on mène des vecteurs $O\mu$ équipollents aux rayons de courbure mM d'une courbe plane (M), la courbe (μ) est ce que Houël a appelé la



radiale de la courbe (M). Par extension d'une terminologie que nous avons précédemment employée [1], cette radiale peut être dite une *adjointe infinitésimale du second ordre* de la courbe donnée.

M. Sucharda a fait connaître une construction de la tangente et du centre de courbure de la radiale [2]. Deux théorèmes généraux qui se trouvent dans notre *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* [3] fournissent une solution immédiate et beaucoup plus simple du même problème.

---

(1) *Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. XIX, 1900, p. 219.

(2) *Bull. de l'Acad des Sciences de Prague*, t. IV, 1897, p. 100.

(3) Édité chez Gauthier-Villars (1896).

Le premier de ces théorèmes ([1]), appliqué aux deux premières développées de la courbe (M), montre que si m_1 et m_2 sont les centres de seconde et de troisième courbure de la courbe (M) et si les vecteurs $O\mu_1$ et $O\mu_2$ sont respectivement équipollents à $m_1 m$ et $m_2 m_1$, les normales aux courbes (μ) et (μ_1) sont respectivement les droites $\mu\mu_1$ et $\mu_1\mu_2$.

Le second ([2]), appliqué à la courbe (μ) que l'on rapporte au pôle O, montre que, si l'on élève en μ à $\mu\mu_1$ la perpendiculaire μ_1H qui coupe $O\mu$ en H, la droite qui joint le point H au milieu I de $\mu_1\mu_2$ passe par le centre de courbure μ' cherché de la radiale (μ).

Si, inversement, la radiale est connue et que l'on sache construire ses centres de courbure, on en déduira pour chaque point de la courbe (M) les centres m, m_1, m_2 des trois premières courbures. Le rayon de première courbure mM sera, en effet, donné par le vecteur $O\mu$ de la radiale (μ) parallèle à la normale mM, le rayon de seconde courbure $m_1 m$ par la sous-normale polaire $O\mu_1$ de (μ). Quant au rayon de troisième courbure $m_2 m_1$, il suffit, pour l'avoir, de connaître le point μ_2.

Or, les points H et μ' étant connus, ce point est immédiatement donné par la parallèle Jμ_2 à Hμ' menée par la symétrique J du point μ_1 par rapport au point μ'.

Remarquons en passant que, si la courbe (μ) est un cercle passant par O, le point μ_1 est diamétralement opposé à μ dans ce cercle, et comme le centre de courbure μ' est alors le milieu du diamètre $\mu\mu_1$, le point J se confond avec le point μ et, par suite, aussi le point μ_2. Autrement dit, le rayon de troisième courbure est,

---

([1]) *Loc cit.*, p. 261. Note au bas de la page.
([2]) *Loc. cit.*, p. 286.

pour chaque point de la courbe (M), équipollent au rayon de première courbure.

Ce pourrait être un exercice de candidat à la licence que de rechercher les courbes (M) ayant pour radiale (μ), un cercle passant par le pôle O.