NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LACOUR

Mouvement d'un plan invariablement lié à une bielle (Exercice sur les fonctions elliptiques)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 559-565

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__559_1>

[F8h]

MOUVEMENT D'UN PLAN INVARIABLEMENT LIÉ A UNE BIELLE. (EXERCICE SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.)

Par M. E. LACOUR,
Professeur à l'Université de Nancy.

1. On suppose qu'une droite de longueur constante PQ se meut de façon que son extrémité P décrive une droite fixe Ox et qu'en même temps son extrémité Q décrive la circonférence d'un cercle ayant pour centre le point O de Ox; il s'agit d'étudier le mouvement d'un plan qui glisse sur le plan du cercle donné, et qui est invariablement lié à la droite PQ.

Dans le plan fixe, nous prenons pour axes Ox et une droite Oy perpendiculaire sur Ox; dans le plan mobile nous prenons pour origine l'extrémité Q de la droite de longueur constante, pour direction positive QX la direction de Q vers P, pour axe QY une droite menée par Q perpendiculaire à PQ dans un sens tel que les deux systèmes d'axes xOy, XQY aient même sens de rotation. Soient α l'angle de Ox avec OQ et $-\beta$ l'angle de Ox avec QX, ces angles étant comptés à partir de Ox et le sens positif pour les angles étant le sens de rotation du système xOy.

La condition pour que PQ ait une longueur constante est, si l'on désigne par R le rayon du cercle et par l la longueur de PQ,

$$(1) \qquad R\sin\alpha - l\sin\beta = 0$$

ou bien

$$(1)' \qquad \sin\beta = k\sin\alpha \qquad \left(k = \frac{R}{l}\right).$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons $l \geqq R$ de sorte que k est compris entre 0 et 1 ou au plus égal à 1.

Les formules de transformation permettant de passer du système xOy au système XQY peuvent s'écrire, en tenant compte de la condition (1),

$$(2) \qquad \begin{cases} x = R\cos\alpha + X\cos\beta + Y\sin\beta, \\ y = -(X-l)\sin\beta + Y\cos\beta, \end{cases}$$

et l'on a d'après (1)',

$$\sin\beta = k\sin\alpha, \qquad \cos\beta = \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}.$$

On voit que, *dans ces formules de transformation, les coefficients peuvent s'exprimer en fonction elliptique d'un paramètre u*. Il suffit de poser

$$u = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

il en résulte

$$(3) \qquad \begin{cases} \sin\alpha = \operatorname{sn} u, & \sin\beta = k \operatorname{sn} u, \\ \cos\alpha = \operatorname{cn} u, & \cos\beta = \operatorname{dn} u, \end{cases}$$

les fonctions sn, cn, dn ayant pour module $k = \frac{R}{l}$.

Les formules (2) deviennent

$$(4) \qquad \begin{cases} x = R \operatorname{cn} u + X \operatorname{dn} u + Y k \operatorname{sn} u, \\ y = (l - X) k \operatorname{sn} u + Y \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

2. La trajectoire d'un point M du plan mobile rapportée aux axes fixes Ox, Oy est définie par les formules (4) où l'on regarde les coordonnées X et Y comme constantes.

On voit sans peine que, si l'on coupe cette courbe par une droite quelconque du plan, on a en général quatre points d'intersection dont les paramètres u_1, u_2, u_3, u_4, satisfont à la condition

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} 4K, 4iK').$$

Le cas particulier où $l = R$ est un cas de dégénérescence pour les fonctions elliptiques :

$$\operatorname{sn} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}}.$$

Le lieu du point M se réduit alors à une ellipse, résultat évident *a priori*, puisque dans ce cas particulier M est invariablement lié à une droite de longueur constante, $2l$, dont les extrémités décrivent respectivement Ox et Oy.

Le lieu de la trace d'un point du plan fixe sur le plan mobile est déterminé par les mêmes formules (4) où l'on regarde x et y comme constants, X et Y comme les coordonnées courantes.

3. Le centre instantané de rotation, C, est à l'intersection de la normale en P à Ox avec le prolongement du rayon OQ. Cherchons d'abord le lieu (γ) de ce point dans le plan fixe.

On trouve de suite que le point C a pour coordonnées

$$\left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos\alpha \pm l\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha},\\ y &= x\,\mathrm{tang}\,\alpha,\end{aligned}\right.$$

le double signe correspond aux deux positions de la droite PQ qui passent par un point Q de la circonférence donnée : le signe + correspond au cas où OP est compté sur Ox dans le sens positif, le signe — au cas où OP est compté dans le sens négatif. On peut se borner au signe + du radical, à condition de compléter ensuite la courbe par symétrie par rapport à Oy.

Les formules elliptiques qui définissent la courbe (γ) sont

$$\left\{\begin{aligned} x &= l(\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,u),\\ y &= x\,\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u},\end{aligned}\right.$$

x et y sont des fonctions doublement périodiques de u admettant comme périodes primitives $4\mathrm{K}$ et $4i\mathrm{K}'$.

Pour trouver le degré de la courbe, il faut déterminer les pôles de x et de y dans un rectangle des périodes, par exemple celui qui a pour sommets o, $4\mathrm{K}$, $4i\mathrm{K}'$, $4\mathrm{K}+4i\mathrm{K}'$.

x ne peut devenir infini qu'en l'un des points

$$i\mathrm{K}',\quad 3i\mathrm{K}',\quad i\mathrm{K}'+2\mathrm{K},\quad 3i\mathrm{K}'+2\mathrm{K}$$

qui sont les zéros de $\Theta(u)$ situés dans le rectangle considéré. Or pour

$$u = iK' + \varepsilon, \qquad \operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u = \frac{-i \operatorname{cn} \varepsilon - i \operatorname{dn} \varepsilon}{\operatorname{sn} \varepsilon},$$

iK' est un pôle simple; il en est de même de $3iK'$; pour

$$u = iK' + 2K' + \varepsilon,$$

$$\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u = \frac{i(\operatorname{cn} \varepsilon - \operatorname{dn} \varepsilon)}{\operatorname{sn} \varepsilon} = \frac{-i\left(\frac{1-k^2}{2}\right)\varepsilon^2 + \ldots}{\varepsilon + \ldots},$$

$iK' + 2K$ est un zéro; il en est de même de $3iK' + 2K$.

Ainsi x admet deux pôles dans le rectangle considéré des périodes, et nous connaissons ses deux zéros.

$y = x \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$ admet six pôles, les deux pôles de x et les quatre zéros de $H_1(u)$.

On conclut de là que la courbe (γ) est du sixième ordre et qu'une parallèle à Oy ne la rencontre qu'en deux points à distance finie.

Pour construire la courbe, on reconnait qu'il suffit de faire varier u de 0 à $2K$ et de compléter ensuite par symétrie par rapport à Ox, puis par rapport à Oy.

Aux formules

$$x = l(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u), \qquad y = x \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$

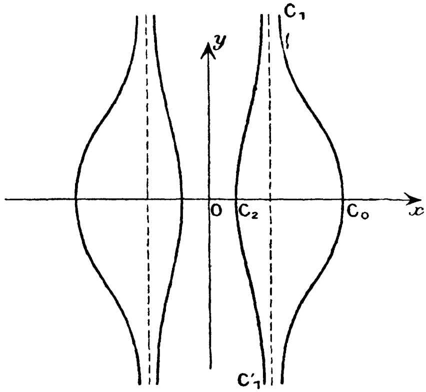
joignons les suivantes

$$\frac{x'_u}{x} = -k \operatorname{sn} u, \qquad \frac{y'_u}{y} = \frac{\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u};$$

remarquons que l'équation

$$\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u \operatorname{sn}^2 u = 0$$

n'est jamais vérifiée dans l'intervalle considéré, ce qui se voit en discutant l'équation correspondante en $\operatorname{sn}^2 u$, et nous avons ce qui est nécessaire pour la construction de la courbe u variant de o à K, puis à 2K, le point C



décrit la branche $C_0 C_1$, puis la branche $C'_1 C_2$.

4. Déterminons encore le lieu (Γ) du centre instantané C dans le plan mobile. Les coordonnées X, Y de C peuvent s'obtenir immédiatement, en remarquant sur une figure que l'on a

$$X = l \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cos(\alpha + \beta),$$

$$Y = l \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \sin(\alpha + \beta),$$

ce qui donne, pour la courbe (Γ), les formules elliptiques

$$\left\{ \begin{aligned} X &= l \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} (\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - k \operatorname{sn}^2 u), \\ Y &= l \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} (\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u) \operatorname{sn} u. \end{aligned} \right.$$

La fonction $\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u$ a été étudiée dans le numéro précédent, elle admet $i\mathrm{K}'$ et $3i\mathrm{K}'$ comme pôles simples $i\mathrm{K}' + 2\mathrm{K}$ et $3i\mathrm{K}' + 2\mathrm{K}$ comme zéros simples.

La fonction $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - k \operatorname{sn}^2 u$ qui figure dans l'expression de X admet comme pôles doubles $i\mathrm{K}$, $3i\mathrm{K}'$, et elle n'admet pas d'autres pôles dans le rectangle considéré des périodes ; il est visible qu'elle ne s'annule pour aucun des zéros de $\mathrm{H}_1(u)$ et on reconnaît (en formant l'équation correspondante en $\operatorname{sn}^2 u$) qu'elle s'annule quand PQ est tangente en Q à la circonférence donnée.

Je me bornerai à ces indications et à la remarque évidente que, pour $l = \mathrm{R}$, chacun des lieux (γ) et (Γ) se réduit à un cercle, ce qui donne une vérification des calculs et un renseignement pour la forme de chacune de ces courbes, quand on suppose l un peu supérieur à R.