Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 427-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__427_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1616.

(1891, p 42*)

La tangente en un point de la développée d'une conique coupe cette développée en quatre points autres que le point de contact : démontrer que les tangentes en ces points sont concourantes et se coupent sur l'ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée.

SOLUTION

Par UN ANONYME.

L'équation de la développée de la conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ est

$$(\Gamma) \qquad a^2 v^2 w^2 + b^2 u^2 w^2 - c^4 u^2 v^2 = 0.$$

Cette courbe a trois tangentes doubles : les axes de la conique et la droite de l'infini, et les deux points de contact de chacune de ces droites avec la courbe sont des points de rebroussement.

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées d'une droite Δ : les tangentes aux points où Δ coupe Γ sont tangentes à la courbe

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u_0 u (b^2 w^2 - c^4 v^2) + v_0 v (a^2 w^2 - c^4 u^2) \\ & \qquad + w_0 w (a^2 v^2 + b^2 u^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous supposons Δ tangente à Γ, et si nous désignons par A, B, C, D les tangentes à Γ, aux points où Δ coupe cette courbe, la courbe Γ et la courbe de troisième classe (1) ont les tangentes communes suivantes : A, B, C, D les axes de coordonnées, la droite de l'infini et la droite Δ, ces quatre dernières comptant deux fois. Le théorème sera démontré si nous prouvons que, dans ce cas, la courbe (1) se décompose en un point et une conique tangente aux axes, à la droite de l'infini et à Δ au point où elle touche Γ, c'est-à-dire si l'on peut déterminer α, β, γ, m, n, p, de manière que l'on ait identiquement

$$u_0 u(b^2 w^2 - c^4 v^2) + v_0 v(a^2 w^2 - c^4 u^2) + w_0 w(a^2 v^2 + b^2 u^2)$$
$$= (\alpha v w + \beta w u + \gamma u v)(m u + n v + p w),$$

d'où

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} u_0 b^2 = \beta p, & -c^4 u_0 = \gamma n, & a^2 w_0 = \alpha n, \\ v_0 a^2 = \alpha p, & -c^4 v_0 = \gamma m, & b^2 w_0 = \beta m \\ & (\alpha m + \beta n + \gamma p = 0). & \end{array}\right.$$

On déduit des six premières relations

$$(2)'\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha}{a^2 v_0 w_0} = \dfrac{\beta}{b^2 w_0 u_0} = \dfrac{\gamma}{-c^4 u_0 v_0}, \\ \dfrac{m}{v_0 w_0} = \dfrac{n}{w_0 u_0} = \dfrac{p}{u_0 v_0}. \end{array}\right.$$

Remplaçant m, n, p par les quantités proportionnelles dans la septième relation (2), nous avons

$$\alpha v_0 w_0 + \beta w_0 u_0 + \gamma u_0 v_0 = 0,$$

qui exprime que Δ est bien tangente à la conique

$$\alpha v w + \beta w u + \gamma u v = 0.$$

Le point de contact a pour coordonnées homogènes

$$\beta w_0 + \gamma v_0, \quad \gamma u_0 + \alpha w_0, \quad \alpha v_0 + \beta u_0,$$

le point de contact avec Γ a pour coordonnées

$$u_0(b^2 w_0^2 - c^4 v_0^2), \quad v_0(a^2 w_0^2 - c^4 u_0^2), \quad w_0(a^2 v_0^2 + b^2 u_0^2),$$

et ces deux points coïncident en vertu des relations (2').

Enfin, en tenant compte des mêmes relations, la dernière égalité (2) s'écrit

$$a^2 v_0^2 w_0^2 + b^2 u_0^2 w_0^2 - c^4 u_0^2 v_0^2 = 0,$$

qui exprime précisément que Δ est tangente à Γ; la première partie du théorème est démontrée.

Soit M le point de concours des tangentes en A, B, C, D, à la développée; les coordonnées homogènes de ce point étant m, n, p, qui sont proportionnelles à $v_0 w_0$, $w_0 u_0$, $u_0 v_0$, la dernière relation ci-dessus s'écrit

$$a^2 m^2 + b^2 n^2 - c^4 p^2 = 0;$$

en revenant aux coordonnées cartésiennes, on voit que le point M est sur la conique

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^4 = 0.$$

C'est bien la conique indiquée dans l'énoncé; elle passe aux points à l'infini de Γ.

Généralisation. — Si l'on considère u, v, w comme des coordonnées trilatères, et si l'on fait abstraction de la relation qui lie a, b, c, on voit sans peine que l'équation (Γ) est l'équation générale des courbes de quatrième classe ayant trois tangentes doubles à points de contact de rebroussement, de sorte que les propriétés ci-dessus s'appliquent à ces courbes; on remarque que les deux points de rebroussement situés sur une tangente double sont conjugués par rapport aux deux autres tangentes, et que la conique lieu de M, qui passe aux six points de rebroussement, est conjuguée par rapport au triangle des tangentes doubles.

La droite Δ ayant pour équation

$$u_0 x + v_0 y + w_0 y = 0,$$

et les coordonnées de M étant

$$\frac{1}{u_0}, \quad \frac{1}{v_0}, \quad \frac{1}{w_0},$$

le point M est le pôle trilinéaire de Δ par rapport au triangle de référence.

Corrélativement, on peut énoncer les propriétés suivantes :

1° Dans une quartique trinodale à tangentes inflexionnelles aux points doubles, les tangentes en un point double sont conjuguées par rapport aux deux autres points doubles;

2° Si d'un point d'une telle courbe on lui mène les quatre tangentes autres que la tangente en ce point, les points de contact de ces quatre droites sont en ligne droite, et cette droite touche à une conique tangente aux six tangentes inflexionnelles et conjuguées par rapport au triangle des points doubles;

3° Par exemple, la lemniscate étant une telle courbe dont les points doubles sont le centre et les points cycliques, les points de contact des quatre tangentes à la lemniscate issues d'un point N de cette courbe sont en ligne droite, et cette droite L est tangente à une hyperbole équilatère fixe H qui a pour asymptotes les tangentes à la lemniscate en son centre O. La droite L étant la polaire trilinéaire de N par rapport au triangle OIJ (I et J désignant les points cycliques), ON est perpendiculaire à N.

Remarque. — L'hyperbole H étant une transformée par inversion de la lemniscate, ce qui précède conduit au théorème suivant : Par un point n d'une hyperbole équilatère et par son centre, on peut faire passer quatre cercles tangents à cette conique en un point différent de n, les quatre points de contact sont sur un cercle passant par le centre et ayant son centre sur On; l'enveloppe de ce cercle est une lemniscate de Bernoulli.

1782.

(1897, p. 436.)

Étant donnée l'équation

$$\varphi(x) = ax^5 - 5bx^4 + 10cx^3 - 10dx^2 + 5ex - f = 0,$$

si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} 8\lambda &= 3c^2 - 4bd + ae, \\ 6\mu &= 2cd - 3be + af, \\ 3\nu &= 3d^2 - 4ce + bf, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \omega &= a\nu - 2b\mu + c\lambda, \\ \omega_1 &= b\nu - 2c\mu + d\lambda, \\ \omega_2 &= c\nu - 2d\mu + e\lambda, \\ \omega_3 &= d\nu - 2e\mu + f\lambda, \end{aligned}\right.$$

la condition

$$3\begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}^2 - 16\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega & \omega_1 & \omega_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0$$

exprime que l'équation a une racine double.

(P. Sondat.)

SOLUTION

Par M. P. Sondat.

Si l'on pose

$$\delta = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega & \omega_1 & \omega_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

il s'agit de démontrer que l'on a

$$(1)\qquad 3\delta^2 + 16\Delta = 0,$$

avec une racine double.

Désignons par φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les dérivées successives de φ, divisées respectivement par 5, 20, 60, 120.

Dans les fonctions λ, μ, ν, ω, ω_1, ω_2, ω_3, δ et Δ, remplaçons

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f$$

par

$$a,\quad \varphi_4,\quad \varphi_3,\quad \varphi_2,\quad \varphi_1\quad \varphi,$$

et désignons par les mêmes lettres accentuées les résultats des substitutions.

En procédant comme au théorème démontré dans les *Nouvelles Annales,* 1900, page 25, on trouve, quel que soit x,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda' &= \lambda, \\ \mu' &= \lambda x - \mu, \\ \nu' &= \lambda x^2 - 2\mu x + \nu, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega, \\ \omega'_1 &= \omega x - \omega_1, \\ \omega'_2 &= \omega x^2 - 2\omega_1 x + \omega_2, \\ \omega'_3 &= \omega x^3 + 3\omega_1 x^2 + 3\omega_2 x - \omega_3, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \delta' = \delta, \qquad \Delta' = \Delta.$$

Or si l'équation proposée a une racine double, en attribuant à x la valeur, soit ρ, de cette racine double, annulant φ et φ_1, on aura

$$9\delta' = \quad 4\varphi_2^2(3\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2),$$
$$27\Delta' = - \quad \varphi_2^4(3\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2)^2,$$

et, par suite,

$$3\delta'^2 + 16\Delta' = 0,$$

or, d'après (3),

$$3\delta^2 + 16\Delta = 0.$$

Remarques. — I. Si ρ était une racine *triple,* on aurait, d'après (2), pour la déterminer, les équations

$$(4)\qquad \lambda x - \mu = 0, \qquad \mu x - \nu = 0, \qquad \omega x - \omega_1 = 0. \qquad \ldots\ldots$$

D'où

$$\rho = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\nu}{\mu} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega},$$

et, par suite, δ serait nul, ainsi que les mineurs de Δ.

II. Si ρ était une racine *quadruple*, les équations (4) ne la feraient pas connaître, car on aurait

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_3 = 0,$$

les trois premières conditions entraînant les quatre autres.

III. On sait d'ailleurs qu'une racine *quintuple* est donnée par

$$\rho = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = -\frac{f}{e}.$$

1822.

(1899, p. 244.)

Étant donnée une conique C *de foyers* F *et* F', *on considère une parabole de foyer* F *dont la directrice* δ *passe par* F'. *Soit* Δ *la directrice de la conique* C *correspondant au foyer* F. *Démontrer que les tangentes communes à la conique* C *et à la parabole* P *touchent ces courbes aux points où elles sont rencontrées par les droites* δ *et* Δ.

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Les deux coniques C et P ayant le foyer F en commun sont tangentes toutes les deux aux deux droites isotropes du point F. Les coniques ont donc encore deux tangentes communes. Soit A un des points d'intersection de δ avec C. La tangente en A à la conique C rencontre la directrice Δ en D, et l'on sait que DF est perpendiculaire sur FA. Or, AD étant bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs δ et FA, si de D on abaisse sur δ la perpendiculaire DB, il en résulte que les triangles rectangles AFD et ABD sont égaux, d'où

$$DF = DB, \qquad \text{angle } FDA = FDB,$$

et, par conséquent, D est un point de la parabole P et a pour tangente en ce point la droite AD.

Autres solutions de MM. Audibert, E.-N. Barisien, Durlimbert.