

VOGT

Théorème relatif aux mineurs d'un déterminant

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 211-214

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__211_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B1a]

THÉOREME RELATIF AUX MINEURS D'UN DÉTERMINANT;

PAR M. VOGT,

Professeur à l'Université de Nancy.

M. Netto a démontré (*Acta mathematica*, t. XVII, et *Journal de Crelle*, t. 114) plusieurs théorèmes relatifs aux mineurs d'un déterminant; l'un d'entre eux en particulier est susceptible d'applications à la théorie des formes binaires; je me propose de donner de ce théorème une démonstration plus élémentaire que celle de M. Netto.

Soit

$$D = |a'_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

un déterminant d'ordre n dont les éléments ne sont soumis à aucune restriction, et soit d un de ses mineurs d'ordre q ; D et d sont différents de zéro; pour simplifier nous supposons que les éléments de d sont contenus dans les q premières lignes et les q premières colonnes de D , c'est-à-dire que l'on a

$$d = |a'_i| \quad (i, j = 1, 2, \dots, q < n).$$

Désignons par A_r^s le mineur du déterminant D obtenu en bordant d par les éléments de la $r^{\text{ième}}$ et de la $s^{\text{ième}}$ colonne, c'est-à-dire

$$A_r^s = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^q & a_1^s \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^q & a_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_q^1 & a_q^2 & \dots & a_q^q & a_q^s \\ a_r^1 & a_r^2 & \dots & a_r^q & a_r^s \end{vmatrix};$$

ou bien

$$A_r^{q+1} x_{q+1} + A_r^{q+2} x_{q+2} + \dots + A_r^n x_n = du_r.$$

En donnant à r les valeurs $q+1, q+2, \dots, n$, on a $n-q$ équations linéaires, dont la solution est donnée par la formule générale

$$(2) \quad x_s = \frac{d}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial A_{q+1}^s} u_{q+1} + \frac{\partial \Delta}{\partial A_{q+2}^s} u_{q+2} + \dots + \frac{\partial \Delta}{\partial A_n^s} u_n \right);$$

les valeurs (1) et (2) des inconnues d'indice supérieur à q , fournies par les deux méthodes, doivent être les mêmes, et comme cela a lieu quelles que soient les valeurs attribuées aux indéterminées $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_n$, il faut que ces indéterminées aient les mêmes coefficients : on déduit de là la relation générale

$$(3) \quad \frac{d}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial A_r^s} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial a_r^s}.$$

Considérons maintenant les deux déterminants dont les éléments sont les deux membres de l'équation précédente lorsque r et s varient de $q+1$ à n , et écrivons qu'ils sont égaux; nous avons

$$\frac{d^{n-q}}{\Delta^{n-q}} \left| \frac{\partial \Delta}{\partial A_r^s} \right| = \frac{1}{D^{n-q}} \left| \frac{\partial D}{\partial a_r^s} \right|,$$

mais d'après les théorèmes connus sur les mineurs du premier ordre d'un déterminant, nous avons

$$\left| \frac{\partial \Delta}{\partial A_r^s} \right| = \Delta^{n-q-1}, \quad \left| \frac{\partial D}{\partial a_r^s} \right| = D^{n-q-1} d;$$

en remplaçant ces déterminants par leurs valeurs, nous en déduisons la relation fondamentale

$$(4) \quad \Delta = D d^{n-q-1};$$

la formule (3) donne ensuite

$$(5) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial A_r^s} = d^{n-q-2} \frac{\partial D}{\partial a_r^s}.$$

Les égalités (4) et (5) constituent le théorème que nous voulions démontrer; elles sont établies en supposant que D et d ne sont pas nuls; comme ce sont des identités dont les deux membres sont des fonctions entières des éléments a_i^j , elles ont encore lieu lorsque ces éléments prennent des valeurs particulières pour lesquelles D ou d sont nuls; elles sont par suite générales.