

A. DE SAINT-GERMAIN

Sur les solides dont le volume s'exprime au moyen de deux formules élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 129-131

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__129_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[05a]

**SUR LES SOLIDES DONT LE VOLUME S'EXPRIME AU MOYEN
DE DEUX FORMULES ÉLÉMENTAIRES;**

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Quand l'aire de section faite dans un solide S par un plan quelconque parallèle à un plan fixe P est une fonction entière du second ou du troisième degré de sa distance z au plan P , on connaît la formule simple qui donne le volume d'un segment de S compris entre deux plans parallèles à P : existe-t-il d'autres solides pour lesquels la formule soit applicable quand on prend arbitrairement les distances des bases du segment au plan P ? J'ai répondu négativement dans le numéro de juillet 1895, mais en particulierisant la forme de la fonction $\varphi(z)$ qui exprime l'aire d'une section : il est facile de lever toute restriction sur la forme de $\varphi(z)$. On doit avoir, quels que soient x et y ,

$$(1) \quad \int_{x-y}^{x+y} \varphi(z) dz = \frac{y}{3} [\varphi(x+y) + \varphi(x-y) + 4\varphi(x)];$$

différentiant deux fois par rapport à x , on a

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) \\ = \frac{y}{3} [\varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + 4\varphi''(x)]. \end{cases}$$

Différentiant au contraire (1) deux fois par rapport à y , après avoir d'abord multiplié par 3, on trouve, avec de simples réductions,

$$\varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) = y[\varphi''(x+y) + \varphi''(x-y)].$$

La comparaison avec (2) donne l'équation fonctionnelle de forme connue

$$\varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) = 2\varphi''(x);$$

d'ailleurs, si on la différentie par rapport à y , on voit que $\varphi'''(x+y)$ doit être égal à $\varphi'''(x-y)$: c'est dire que $\varphi'''(z)$ doit être constant et $\varphi(z)$ un polynôme du troisième degré.

Si l'on fait varier seulement la hauteur du segment considéré, en laissant fixe la section moyenne dont on peut supposer le z nul, on trouve que $\varphi(z)$ doit être un trinôme du second degré augmenté d'une fonction impaire quelconque de z .

Lorsque S est un cône, le volume du segment ou tronc est donné par une formule encore plus élémentaire; cette formule est-elle applicable à des segments de solides pour lesquels $\varphi(z)$ n'aurait pas la forme simple $\Lambda^2(z-c)^2$ qui convient au cône? Non encore. Remplaçant $\varphi(z)$ par $F^2(z)$, on devrait avoir, quels que soient x et y ,

$$\int_x^y F^2(z) dz = \frac{y-x}{3} [F^2(x) + F^2(y) + F(x)F(y)].$$

Multiplions par 3 et différencions par rapport à y : le

résultat peut s'écrire

$$\begin{aligned} 2F^2(y) - F(x)F(y) - F^2(x) \\ = (y-x)[2F(y) + F(x)]F'(y); \end{aligned}$$

on peut diviser par $2F(y) + F(x)$, et il reste

$$F(y) - F(x) = (y-x)F'(y).$$

La différentiation relative à x cùt donné de même

$$F(x) - F(y) = (x-y)F'(x).$$

$F'(x)$ et $F'(y)$ doivent donc être égaux, donc constants;
 $F(z)$ est de la forme $A(z-c)$ et $\varphi(z)$, $A^2(z-c)^2$,
 comme dans le cône.