NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MICHAEL BAUER

Remarques sur la théorie des groupes finis

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19 (1900), p. 59-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__59_1>

[A4a]

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES GROUPES FINIS;

PAR M. MICHAEL BAUER.

Je me propose de généraliser quelques théorèmes de M. *Frobenius* (1) sur le nombre de certains sous-groupes. Les méthodes employées sont celles de M. Frobenius.

I. *Le nombre des sous-groupes d'ordre* $\frac{n}{p}$ *est* $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} (\mathrm{mod}\, p)$ *selon qu'il y a entre eux des sous-groupes invariants ou non. Le nombre* n *désigne l'ordre du groupe,* p *est un facteur premier.*

(1) *Berliner Sitzungsberichte*, 1895, p. 163-194, 981-993.

S'il n'y a pas de sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$, le nombre des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p}$ est évidemment $\equiv 0 \pmod{p}$. Soient donc A, B deux sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$. Alors, désignant le groupe donné par h, on a

$$h = AB;$$

d'où il suit que le plus grand commun diviseur de A et de B est un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{p^2}$. Si E est un autre sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{p}$, le plus grand commun diviseur de A et de E est différent du plus grand commun diviseur de A et de B. Ainsi les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$ se partagent en classes. La classe $i^{ième}$ se compose des sous-groupes

$$A_1^{(i)}, \quad A_2^{(i)}, \quad \ldots, \tag{1}$$

dont le plus grand commun diviseur avec A est $\mathfrak{I}_i$. Mais les facteurs-groupes

$$\frac{A_1^{(i)}}{\mathfrak{I}_i}, \quad \frac{A_2^{(i)}}{\mathfrak{I}_i}, \quad \ldots,$$

ne sont que les sous-groupes d'ordre p du groupe $\frac{h}{\mathfrak{I}_i}$, dont l'ordre est p^2, excepté le sous-groupe $\frac{A}{\mathfrak{I}_i}$. Ainsi, chaque classe contient des groupes en nombre p ou 0; le nombre des sous-groupes invariants est donc $\equiv 1 \pmod{p}$.

S'il y a encore des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p}$ qui ne sont pas invariants, leur nombre est $\equiv 0 \pmod{p}$.

C. Q. F. D.

II. *Le nombre des sous-groupes invariants d'ordre* $\frac{n}{p^\beta}$

est $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} (\mathrm{mod}\, p)$ *selon qu'il y a des sous-groupes invariants entre eux ou non.*

S'il n'y a pas de sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$, le nombre cherché est évidemment $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. S'il y a des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$, alors il existe aussi des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$. Soient les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$

$$(2) \qquad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_r \qquad r \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p),$$

et soient les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$,

$$(3) \qquad B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_s.$$

Si nous désignons par a_ρ le nombre des groupes (3) contenus comme sous-groupes dans A_ρ et par b_σ le nombre des groupes (2) que contient B_σ, nous avons

$$(4) \qquad \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma = \sum_{\rho=1}^{r} a_\rho.$$

Cependant

$$b_\sigma \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p).$$

Car, si le groupe A_x contient B_σ comme sous-groupe, alors le groupe $\frac{A_x}{B_\sigma}$ est un sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$ du groupe $\frac{h}{B_\sigma}$ dont l'ordre est p^β. De la relation (4) il suit donc que

$$(5) \qquad \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma \equiv s \equiv \sum_{\rho=1}^{r} a_\rho (\mathrm{mod}\, p).$$

Déterminons maintenant les nombres a_ρ. A_ρ est un sous-groupe invariant. Nous démontrerons qu'il contient

des groupes d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$ comme sous-groupes invariants (ces sous-groupes ne doivent pas être à la fois des sous-groupes invariants de h). Posons

$$n = p^x m, \text{ le plus grand commun diviseur } (p, m) = 1.$$

Si A_ρ contient, par exemple, B_1 comme sous-groupe, B_1 est déjà un sous-groupe cherché. S'il n'est pas ainsi, nous avons

$$h = A_\rho B_1,$$

d'où il suit que le plus grand commun diviseur de A et de B est un groupe $\mathfrak{H}$, dont l'ordre est $p^{x-\beta-1}m$. Ce groupe est sous-groupe invariant de A. Le facteur-groupe $\frac{A_\rho}{\mathfrak{H}}$ d'ordre p^β a des sous-groupes invariants d'ordre p, donc A a des sous-groupes invariants d'ordre

$$p^{x-\beta}m = \frac{n}{p^\beta}.$$

Notre théorème II étant déjà démontré pour les sous-groupes d'indice p, nous pouvons le supposer démontré pour les sous-groupes d'indices

$$p, \quad p^2, \quad \ldots, \quad p^{\beta-1}.$$

Il en résulte que le nombre des sous-groupes invariants de A_ρ, dont l'ordre est $\frac{n}{p^\beta}$, est $\equiv 1 \pmod p$. Il faut encore exclure de ces sous-groupes ceux qui ne sont pas des sous-groupes invariants de G. Leur nombre est évidemment $\equiv 0 \pmod p$. Donc

$$a_\rho \equiv 1 \pmod p,$$

d'où il suit que

$$s \equiv \sum_{\rho=1}^{r} a_\rho \equiv r \equiv 1 \pmod p.$$

S'il y a encore des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$ qui ne sont pas invariants, leur nombre est $\equiv 0 \pmod{p}$.

C. Q. F. D.

M. *Frobenius* (¹) a démontré le théorème suivant :

III. *Posons*

$$n = ab.$$

Si le plus grand commun diviseur

$$(a, b) = 1,$$

alors le groupe ne peut avoir qu'un seul sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{b}$. *Chaque sous-groupe, dont l'ordre divise* $\frac{n}{b}$, *est contenu comme sous-groupe dans ce sous-groupe invariant.*

On peut établir par un raisonnement analogue la proposition suivante, qui complète ce théorème :

IV. *Chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise* $\frac{n}{b}$, *est sous-groupe de tous les sous-groupes d'ordre* $\frac{n}{b}$.

De I et IV on déduit les propositions suivantes :

V. *Posons*

$$n = ab,$$

$(a, b) = 1$, p est un nombre premier.

Si le nombre des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{bp}$ *est* > 1, *alors le nombre des sous-groupes d'ordre* $\frac{n}{bp^\beta}$, $\beta \geq 1$, *est* $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \pmod{p}$.

(¹) Page 170, I, § II.

Il suit alors de ce qui précède qu'il y a un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{b}$, etc.

VI. *Posons*

$$n = ab,$$
$$(a, b) = 1, \qquad p \text{ est un nombre premier.}$$

S'il y a un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{bp^\beta}$, *alors il existe un nombre*

$$0 \leqq \gamma \leqq \beta,$$

de telle sorte que le groupe ait un seul sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{bp^\gamma}$.

Les théorèmes III, IV sont contenus dans les suivants :

VII. *Posons*

$$n = n' \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \qquad n' = ab,$$
$$(n', p_i) = 1, \qquad (a, b) = 1.$$

Si A *est un sous-groupe invariant d'ordre*

$$a \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i},$$

alors chaque sous-groupe, dont l'ordre divise a, est sous-groupe de A.

VIII. *Si* A *est un sous-groupe d'ordre*

$$a \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i},$$

alors chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise a, est sous-groupe de A.

Voici des conséquences de VIII :

IX. *Posons*

$$n = ab,$$

$$(a, b) = 1, \qquad p \text{ est un nombre premier.}$$

S'il y a un sous-groupe invariant d'ordre a, alors le nombre des sous-groupes d'ordre ap^β *est* $\equiv 1 \pmod{p}$. Car, G étant un sous-groupe d'ordre ap^β, le facteur-groupe $\frac{G}{A}$ est sous-groupe d'ordre p^β du groupe $\frac{h}{A}$.

X. *Si un groupe a un sous-groupe invariant, dont l'ordre n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n, il a aussi un sous-groupe invariant, de telle sorte qu'il n'existe pas d'autres sous-groupes invariants dont l'ordre soit le même.*

Soient A, B des sous-groupes invariants d'un même ordre, qui n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n. Le multiple

$$AB$$

est aussi un sous-groupe invariant, dont l'ordre a la même propriété, etc.

XI. *Si l'ordre d'un sous-groupe invariant maximum, m, n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n, il n'y a pas d'autre sous-groupe invariant d'ordre m.*

XII. *Si* M *est un sous-groupe maximum dont l'ordre m n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n, alors chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise m, est sous-groupe de* M.

M. *Frobenius* démontre le *théorème généralisé de M. Sylow* en faisant usage de l'équation symbolique

$$X^\sigma = E.$$

On peut éviter la discussion de cette équation si l'on part du *théorème de M. Sylow*, et l'on fait l'induction par ordres décroissants.