

E. IAGGI

## **Sur les substitutions uniformes et le problème de Babbage**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 19 (1900), p. 483-489

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1900\\_3\\_19\\_\\_483\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__483_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

[G2]

**SUR LES SUBSTITUTIONS UNIFORMES  
ET LE PROBLÈME DE BABBAGE;**

PAR M. E. JAGGI.

MM. Leau et Lémery se sont occupés à plusieurs reprises, dans ce Journal et dans d'autres Recueils, des fonctions itérées

$$f_n(x) = f_{n-1}[f_1(x)]$$

en supposant que l'itération de  $f_1$  ne produise qu'un nombre fini  $m$  de fonctions distinctes, c'est-à-dire que

$$f_{m+1}(x) = x,$$

et M. Leau a notamment démontré que, lorsque les  $f_n$  sont uniformes, elles sont algébriques et linéaires <sup>(1)</sup>.

Or on peut démontrer que ces fonctions sont linéaires non seulement dans le cas particulier d'un groupe d'un nombre fini de substitutions obtenues avec une seule substitution fondamentale  $f_1$ , mais même dans le cas général d'un groupe de substitutions uniformes, en nombre quelconque fini ou infini, obtenues par répétitions et combinaisons de substitutions fondamentales en nombre quelconque.

On sait que, si  $f_n(x)$  est une substitution d'un groupe quelconque, la fonction  $f_{-n}(x)$ , obtenue par inversion de  $f_n$ , fait aussi partie du groupe <sup>(2)</sup> (dans le cas par-

(<sup>1</sup>) *Sur les fonctions itérées*. Note de M. Leau parue en 1898 dans le *Bulletin de la Société Mathématique*.

(<sup>2</sup>) *Recherches sur la Théorie des fonctions*, par M. Jaggi. Besançon, 1897.

ticulier précédent,  $f_1$  et  $f_m$ ,  $f_p$  et  $f_{m-p+1}$  sont inverses deux à deux); il s'ensuit que, si  $f_n$  et  $f_{-n}$  sont uniformes, elles sont linéaires. On peut d'ailleurs entrer dans plus de détails.

Soit  $s$  une substitution d'un groupe donné quelconque, et soit

$$(1) \quad s = f(x)$$

la formule de  $s$ , qui l'exprime en  $x$  au moyen d'opérations qu'indique  $f$ .

Le groupe qui contient  $s$  contient aussi son inverse  $\sigma$  que l'on peut écrire

$$(2) \quad \sigma = \varphi(x),$$

où  $\varphi$  est obtenue par inversion de  $f$ ; or de (1) on tire :

$$(3) \quad x = \varphi(s).$$

Si donc  $s$  et  $\sigma$  sont des fonctions uniformes de  $x$ , c'est-à-dire si  $f(x)$  et  $\varphi(x)$  sont uniformes, (1) et (3) font voir que  $s$  et  $x$  sont fonctions uniformes l'une de l'autre, c'est-à-dire sont liées par une équation du premier degré par rapport à chacune d'elles, ou enfin que  $s$  est une fonction linéaire de  $x$ , et alors il en est évidemment de même de  $\sigma$ .

Il en résulte que, *si un groupe d'un nombre quelconque, fini ou infini, de substitutions obtenues au moyen de substitutions fondamentales en nombre quelconque, ne contient que des substitutions uniformes, ce groupe est exclusivement composé de substitutions linéaires.*

On peut aussi énoncer ce fait de la manière suivante :  
*Si un groupe formé d'un nombre quelconque, fini ou infini, de substitutions avec des substitutions fonda-*

*mentales en nombre quelconque, n'est pas exclusivement composé de substitutions linéaires, ce groupe contient des substitutions non uniformes.*

Les considérations précédentes montrent encore que si l'on veut constituer un nombre fini  $m$  de substitutions avec une seule substitution fondamentale  $f_1(x)$ , cette fonction doit être *algébrique*.

En effet, si  $f_1(x)$  était transcendante, uniforme ou non uniforme, son inverse, qui fait partie du groupe, le serait aussi; or de deux fonctions transcendantes inverses l'une de l'autre, l'une au moins a une infinité de valeurs, sinon ces fonctions sont algébriques; toutes ces déterminations devant faire partie du groupe, on voit que le groupe ne peut se composer d'un nombre fini de substitutions si  $f_1(x)$  n'est pas algébrique, ainsi que toutes les autres fonctions  $f_n$  obtenues par répétition de  $f_1(x)$ ; il est évident d'ailleurs que, si  $f_1(x)$  satisfait à cette condition, toutes les autres y satisfont. Si maintenant on considère un groupe d'ordre quelconque  $p$ , c'est-à-dire formé au moyen de  $p$  substitutions fondamentales

$$f_1, f_1', f_1'', \dots, f_1^p.$$

ce groupe contient comme sous-groupe le groupe d'ordre un, formé au moyen d'une seule,  $f_1$  par exemple, des  $p$  substitutions fondamentales; or nous venons de démontrer qu'un tel groupe d'ordre un ne peut être composé d'un nombre fini de substitutions que si  $f_1$  est algébrique: il s'ensuit qu'*a fortiori* le groupe d'ordre  $p$  considéré ne peut être composé d'un nombre fini de substitutions que si ses  $p$  substitutions fondamentales et, par suite, toutes les autres sont algébriques.

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante; on connaît trop d'exemples de groupes de substitutions

algébriques en nombre infini pour qu'il soit utile d'exister.

On peut cependant caractériser davantage les groupes d'un nombre fini de substitutions obtenues, soit avec plusieurs substitutions fondamentales, soit avec une seule :

Si

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots, f_m$$

sont les  $m$  substitutions algébriques d'un groupe d'ordre quelconque, le produit

$$F(x) = \prod_n f_n(x) \quad [n = 0, 1, 2, \dots; f_0(x) = x]$$

reste invariable quand on substitue à  $x$  une quelconque des fonctions  $f_n$  :

$$F[f_n(x)] = F(x).$$

Or cette fonction est algébrique. Considérons donc une fonction algébrique quelconque, uniforme ou multiforme,

$$y = F(x)$$

dont l'inverse, la fonction  $x$  de  $y$ , ait  $m + 1$  valeurs; les fonctions  $f$  déterminées par l'équation

$$F(f) = F(x) \quad (1)$$

sont les fonctions les plus générales qui forment un groupe de  $m + 1$  substitutions (y compris la substitution identique  $f_0 = x$ ).  $F(x)$  ne restant assujettie, bien entendu, qu'à ces conditions : 1° d'être algébrique; 2° d'avoir pour inverse une fonction ayant  $m + 1$  valeurs.

---

(1) Le cas où  $F(x)$  est rationnelle et de degré  $m + 1$  en  $x$  n'est qu'un cas particulier auquel ne peuvent se ramener tous les cas possibles des groupes considérés (*loc. cit.*).

Les groupes obtenus ainsi ne sont pas nécessairement du premier ordre. Ceux qui sont du premier ordre forment la solution la plus générale du problème de Babbage :

*Déterminer des fonctions itérées en nombre  $m$  telles que*

$$(4) \quad f_{m+1}(x) = f_m[f_1(x)] = x.$$

A ce sujet il y a lieu de remarquer que, dans la solution qu'en a proposée Babbage, solution reproduite dans quelques Traités d'Analyse <sup>(1)</sup>, entre une fonction *arbitraire*, ce qui serait en contradiction avec nos conclusions.

Si  $f_1$  est une solution particulière de l'équation fonctionnelle précédente, par exemple une substitution linéaire, il forme la fonction

$$(5) \quad \varphi_1(x) = \psi_{-1}\{f_1[\psi_1(x)]\},$$

où  $\psi_1$  est une fonction *arbitraire*, ce qui donne, en écrivant  $\psi x$  au lieu de  $\psi(x)$ ,

$$(6) \quad \varphi_2(x) = \psi_{-1}f_1\psi_1\psi_{-1}f_1\psi_1x.$$

Or,  $\psi_1$  et  $\psi_{-1}$  étant inverses l'une de l'autre, il suppose que

$$(7) \quad \psi_1\psi_{-1}x = x,$$

pour en conclure

$$(8) \quad \varphi_2(x) = \psi_{-1}f_2\psi_1x.$$

Mais ceci suppose que  $\psi_1x$  est uniforme (transcendante ou algébrique). En effet, si  $\psi_1(x)$  n'est pas uni-

---

(1) LAURENT, *analyse*, t. VI.

forme,  $\psi_1 \psi_{-1} x$  ne l'est pas non plus et a plusieurs valeurs ; parmi ces valeurs se trouve  $x$ , mais les autres valeurs ne peuvent être  $x$ , sinon  $\psi x$  serait uniforme, et la formule (8) n'est équivalente à la formule (6) qu'autant que  $\psi x$  est uniforme.

Le but de la formation (5) de  $\varphi_1$  étant de pouvoir écrire

$$\begin{aligned}\varphi_2 x &= \psi_{-1} f_2 \psi_1 x, \\ \varphi_3 x &= \psi_{-1} f_3 \psi_1 x, \\ &\dots\dots\dots, \\ \varphi_{m+1}(x) &= \psi_{-1} f_{m+1} \psi_1(x = \psi_{-1} \psi_1 x = x,\end{aligned}$$

on doit tout d'abord supposer que  $\psi_1(x)$  est uniforme. Mais on peut remarquer en outre que, si  $\psi_{-1} x$  n'est pas uniforme et a, par exemple,  $p$  valeurs, chacune des fonctions  $\varphi_n x$  a  $p$  valeurs. La dernière, par exemple, qui est égale à  $\psi_{-1} \psi_1 x$ , ne se réduit à  $x$  que si  $\psi_{-1}$  est uniforme. Supposons, par exemple, que  $\psi_1$ , qui est uniforme, soit égale à  $\sin x$ . On aurait

$$\begin{aligned}\varphi_{m+1} x = \psi_{-1} \psi_1 x &= \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x + 2n\pi, \\ (2n+1)\pi - x, \end{cases} \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).\end{aligned}$$

Si  $\psi_1$  est une fonction rationnelle de degré  $p$  en  $x$ ,  $\psi_{-1}$  a  $p$  valeurs.

Donc, dans aucun cas, ni  $\psi_1$  ni  $\psi_{-1}$  ne peuvent être multiformes, et, par conséquent, ces deux fonctions inverses l'une de l'autre ne peuvent être que *linéaires*. Mais alors les fonctions  $\varphi_n$  sont elles-mêmes *linéaires*. Le procédé de formation des fonctions  $\varphi_n$  par la formule de Babbage, qui n'est valable que pour des fonctions  $\psi$  linéaires, ne donne donc rien si l'on se sert de fonctions  $f_1$  linéaires, car on sait trouver directement tous les groupes de  $m$  substitutions linéaires. Cependant, si l'on connaît une solution  $f_1$  non linéaire

de l'équation (4), la formule (5), où  $\psi$  est une fonction linéaire, conduira à d'autres groupes de  $m$  substitutions. Mais ce ne seront encore évidemment que des solutions particulières du problème de Babbage.