

M. EFIMOV

Les séries dans la pangéométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 28-31

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__28_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[Q1b]

LES SÉRIES DANS LA PANGÉOMÉTRIE;

PAR M. M. EFIMOV.

Dans son *Précis de Géométrie ou Pangéométrie*,
Lobatchefsky emploie les relations

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x},$$

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Puis en remplaçant, dans un triangle dont les côtés

sont infiniment petits, ces expressions par leurs valeurs approchées

$$\sin \Pi(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

$$\cos \Pi(x) = x - \frac{1}{3}x^3 = x,$$

$$\tan \Pi(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{6}x^2 \right) = \frac{1}{x},$$

il trouve les théorèmes de la géométrie non-euclidienne.

On peut montrer que l'équation

$$\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c)$$

embrasse aussi le théorème de Pythagore. En effet, en substituant les valeurs approchées, on aura

$$\left(2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{2} \right) = 1 - \frac{c^2}{2}.$$

Ensuite, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, particulièrement dans un triangle presque isocèle, il vient

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

De la même manière, la relation de Lagrange entre triangles sphérique et rectiligne, dans lesquels les côtés sont égaux, mais les angles différents, permet de déduire la formule fondamentale de la pangéométrie pour la résolution des triangles obliques.

En remplaçant, dans la formule du triangle sphérique

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

les valeurs des côtés par leurs développements en séries trigonométriques, on a

$$1 - \frac{c^2}{2} = \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{2} \right) + ab \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{6} \right) \cos C.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \sin \Pi(c) = & \sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \\ & + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{6} \right) \cos C. \end{aligned}$$

Puis, dans tout triangle rectiligne,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C';$$

et quand l'angle C' s'approche de $\frac{\pi}{2}$, alors son cosinus

tend vers zéro; par suite

$$1 - \frac{a^2 + b^2}{6} = 1 - \frac{c^2}{6}.$$

Mais

$$\tan \Pi(c) = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{6} c^2 \right),$$

ce qu'on déduit aussi immédiatement de

$$\frac{\sin \Pi(c)}{\cos \Pi(c)} = \frac{1 - \frac{1}{2} c^2}{c - \frac{1}{3} c^3}.$$

Par conséquent

$$\tan \Pi(c) = \frac{1}{\cos \Pi(c)} \left(1 - \frac{1}{6} c^2 \right),$$

d'où

$$1 - \frac{1}{6} c^2 = \sin \Pi(c).$$

On détermine enfin

$$\begin{aligned} \sin \Pi(c) = & \sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \\ & + \sin \Pi(c) \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos C, \end{aligned}$$

d'où, en divisant par le premier terme,

$$1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos C = \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)}{\sin \Pi(c)}.$$

Il est évident que les valeurs approchées, actuellement enseignées, sont les deux premiers termes des séries suivantes

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} - \frac{61x^6}{6!} \\ + \frac{1385x^8}{8!} - \frac{50521x^{10}}{10!} + \dots$$

Dans l'autre cas,

$$\sin \Pi(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = 1 - \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} \\ + \frac{7}{15} \frac{x^4}{4!} - \frac{31}{21} \frac{x^6}{6!} + \frac{381}{45} \frac{x^8}{8!} - \dots$$