

P. LEFEBVRE

Note rectificative

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19 (1900), p. 177-179

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__177_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[P1a]

NOTE RECTIFICATIVE;

PAR M. P. LEFEBVRE.

Dans une Note insérée au numéro de novembre des *Nouvelles Annales* (p. 528; 1899), j'ai indiqué l'existence d'une division de n points sur une droite généralisant la division harmonique. $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$,
Ann. de Mathémat., 3^e série, t. XIX. (Avril 1900.)

$M_{k+1}, \dots, M_n$ étant ces n points, il existe entre deux de ces points, M_k, M_{k+1} , et deux points fixes imaginaires de la droite, E, F , la relation

$$\frac{M_{k+1}E}{M_{k+1}F} : \frac{M_kE}{M_kF} = K,$$

K étant une racine $n^{\text{ème}}$ primitive de l'unité.

La division harmonique correspondrait au cas où $n = 1$, $K = \pm i$.

Une inadvertance m'a fait dire que « quatre des n points ont pour rapport anharmonique une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, dans les mêmes conditions où les quatre points d'une division harmonique ont pour rapport anharmonique -1 ». Il est clair que le rapport anharmonique de 4 des n points est toujours réel.

Le rapport anharmonique de 4 des n points peut toujours être mis sous la forme

$$H_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n} (a+b) \sin \frac{\pi}{n} (b+c)}{\sin \frac{\pi}{n} a \sin \frac{\pi}{n} c},$$

a, b, c étant trois nombres entiers positifs ou négatifs plus petits que n en valeur absolue, et tels qu'aucun des nombres $a+b, b+c$ et $a+b+c$ ne soit égal à n .

Inversement toute expression de cette forme peut être regardée comme rapport anharmonique de 4 des n points. C'est le cas pour $2 \cos \frac{p\pi}{n}$ et $4 \cos^2 \frac{p\pi}{n}$ quel que soit le nombre entier p . Toutefois, l'expression ne devra, bien entendu, être ni nulle, ni infinie, ni égale à 1.

H_n n'admet jamais la valeur -1 si n impair, l'admet toujours si n pair. A cette valeur correspondent des groupes de 4 des n points formant division harmonique.

Si n n'est pas premier, H_n admet évidemment toutes les valeurs admises par les expressions $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$

correspondant à ses facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ autres que 2 et 3. Il y aurait donc lieu de distinguer ce que l'on pourrait appeler les valeurs primitives de H_n .

Si n est premier, le nombre de valeurs distinctes admises par H_n est égal au sextuple du nombre pyramidal de côté $\frac{n-3}{2}$; c'est donc $\frac{(n-3)(n^2-1)}{8}$. Elles correspondent 6 par 6 aux divers groupes que l'on peut former avec 4 des n points (4 points donneront 6 rapports anharmoniques).

Pour $n = 5$, on trouve un groupe de valeurs; ce sont $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Pour $n = 6$, trois groupes de valeurs : $-1, 2, \frac{1}{2}$; $-2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$; $-3, -\frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$.

Pour $n = 7$, quatre groupes de valeurs; il suffira d'en citer une de chacun de ces groupes $2 \cos \frac{2\pi}{7}, 2 \cos \frac{4\pi}{7}, 2 \cos \frac{6\pi}{7}$ et $2 \cos \frac{\pi}{7}$. (Le dernier groupe contient à la fois $2 \cos \frac{\pi}{7}, 2 \cos \frac{3\pi}{7}, 2 \cos \frac{5\pi}{7}$ et leurs inverses; l'équation du troisième degré qui donne $2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{7}$ se transformant en elle-même en remplaçant x par $\frac{1}{1-x}$.)