

AUDIBERT

**Certificats d'études supérieures
(session de juillet 1898)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 18
(1899), p. 461-465

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__461_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES
(SESSION DE JUILLET 1898);

SOLUTIONS PAR M. AUDIBERT.

Paris.

I. Intégrer le système d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} + x - y = e^t,$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} + x - z = \cos t,$$

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} + x = 0;$$

on mettra l'intégrale sous forme réelle.

Retranchons (2) de la somme (1) + (3); on a

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + x - y + z = e^t - \cos t,$$

dont l'intégrale est

$$(\alpha) \quad x - y + z = \frac{e^t}{2} - \frac{\cos t + \sin t}{2} + 2C e^{-t}.$$

L'élimination de $x - y$ entre (1) et (α) donne

$$\frac{dx}{dt} - z = \frac{e^t}{2} + \frac{\cos t + \sin t}{2} - 2C e^{-t}.$$

En différentiant (3) on a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} = 0,$$

et de la différence de ces deux dernières relations résulte

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z = -\frac{e^t}{2} - \frac{\cos t + \sin t}{2} + 2C e^{-t},$$

dont l'intégrale générale est

$$z = A \sin t + B \cos t + \frac{t}{4} (\cos t + \sin t) + C e^{-t} - \frac{e^t}{4}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} x = -\frac{dz}{dt} &= -A \cos t + B \sin t - \frac{\cos t + \sin t}{4} \\ &\quad + \frac{t}{4} (\cos t + \sin t) + C e^{-t} + \frac{e^t}{4}, \\ y = x + \frac{dx}{dt} - e^t &= (A + B) \sin t - (A - B) \cos t \\ &\quad + \frac{\cos t + 3 \sin t}{4} + \frac{t}{2} \cos t - \frac{e^t}{2}. \end{aligned}$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int \int x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} (1 - x - y)^{\frac{2}{3}} dx dy$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0.$$

Précisant les limites, l'intégrale peut s'écrire

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{1-x} y^{\frac{1}{3}} (1 - x - y)^{\frac{2}{3}} dy.$$

La valeur de I exprimée à l'aide des fonctions Γ est égale à

$$\frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \cdot \Gamma(\frac{4}{3}) \cdot \Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3})} = \frac{2^4 \cdot \Gamma(\frac{1}{3}) \cdot \Gamma(\frac{2}{3})}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9};$$

mais

$$\Gamma(\frac{1}{3}) \cdot \Gamma(\frac{2}{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

en vertu de la formule connue

$$\Gamma(n) \cdot \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

Il en résulte

$$I = \frac{2^5 \cdot \pi}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}.$$

Cette intégrale peut être calculée par la méthode élémentaire en posant $y = (1-x) \frac{z^2}{1+z^3}$; on a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^2 dx \cdot 3 \int_0^\infty \left[\frac{dz}{(1+z^3)^2} - \frac{dz}{(1+z^3)^3} \right] \\ &= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^2 dx. \end{aligned}$$

Faisant ensuite $x = u^2$,

$$I = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \int_0^1 (1-u^2)^2 u^2 du = \frac{2^5 \cdot \pi}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}.$$

Montpellier.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(x+\alpha)(x^2-\alpha^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x(x+\alpha) \frac{dy}{dx} + 6xy = 2(x-\alpha)^3,$$

sachant qu'elle peut être vérifiée par des polynômes en x .

L'équation sera vérifiée par $y = ax^2 + bx + c$, si l'on fait $a = 1$, $b = -\alpha$, $c = \frac{2\alpha^2}{3}$.

L'intégrale générale sera donc

$$u + x^2 - \alpha x + \frac{2x^2}{3},$$

u étant l'intégrale générale de l'équation privée de second membre

$$(1) \quad (x + \alpha)(x^2 - \alpha^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x(x + \alpha) \frac{du}{dx} + 6\alpha u = 0.$$

Différentiant trois fois de suite, on a

$$(x + \alpha) \frac{d^5 u}{dx^5} + 5 \frac{d^4 u}{dx^4} = 0.$$

Cette dernière équation intégrée donne

$$M = A(x + \alpha)^{-1} + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

Introduisant cette valeur de u dans (1) et disposant de trois des constantes arbitraires pour qu'elle devienne une identité, on a

$$u = A(x + \alpha)^{-1} + B(x + \alpha)^3 - \frac{2A}{3\alpha}.$$

L'intégrale générale cherchée sera donc

$$y = A(x + \alpha)^{-1} + B(x + \alpha)^3 + x^2 - \alpha x + \frac{2(\alpha^3 - A)}{3\alpha}.$$

II. Calculer la valeur de l'intégrale triple

$$\iiint \left[(x + y + z)^2 - \frac{9a^2}{5} \right] dx dy dz$$

lorsque x, y, z prennent toutes les valeurs vérifiant les deux inégalités

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2az &< 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2 &< 0. \end{aligned}$$

Cet énoncé revient à dire que l'intégrale est prise à l'intérieur du solide formé par le parabolöide de révolution $x^2 + y^2 = 2az$, limité par la calotte sphérique que ce parabolöide découpe sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

En donnant d'abord à z une valeur constante, on aura à intégrer la fonction à l'intérieur d'un cercle de rayon $(2az)^{\frac{1}{2}}$, z étant compris entre 0 et a . Ce rayon prend la valeur $(3a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ pour $a < z < a\sqrt{3}$.

L'intégrale

$$\iint (xy + xz + yz) dx dy$$

prise à l'intérieur d'un cercle $x^2 + y^2 = f(z)$, est nulle quelle que soit la valeur attribuée à z . La fonction peut donc être simplifiée et réduite à l'expression

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9a^2}{5} = \rho^2 + z^2 - \frac{9a^2}{5} = \varphi(\rho, z),$$

en faisant $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

On a alors à calculer l'intégrale

$$2\pi \left[\int_0^a dz \int_0^{(2az)^{\frac{1}{2}}} \varphi(\rho, z) \rho d\rho + \int_0^{a\sqrt{3}} dz \int_a^{(3a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \varphi(\rho, z) \rho d\rho \right] = -\frac{7}{30} \pi a^5.$$