

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 18
(1899), p. 435-436

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__435_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1772.

(1897, p. 340.)

Trouver le lieu des points M tels qu'en menant à une ellipse les tangentes qui la touchent en A et B, le cercle circonscrit au triangle MAB soit tangent à l'ellipse.

Même question pour la parabole. (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Soit donnée l'ellipse

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 \right) (y + mx + n) = 0,$$

représente une conique qui passe par les points de rencontre de (1) avec deux sécantes, dont l'une est la polaire de M (α, β). La condition pour que l'autre soit tangente à (1) et, par suite, à (2) est

$$n^2 = a^2 m^2 + b^2.$$

Pour que (2) passe par M, il faut que

$$1 + \lambda(\beta + mx + n) = 0.$$

Enfin (2) sera un cercle, si l'on a

$$\frac{1 + m\alpha\lambda}{a^2} = \frac{1 + \beta\lambda}{b^2}$$

et

$$\frac{\alpha}{a^2} + \frac{m\beta}{b^2} = 0.$$

En éliminant λ , m et n entre ces quatre dernières équations, on a la résultante

$$a^2 b^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2 = (\alpha^2 - b^2)^2 (\alpha^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2)$$

ou

$$(3) \quad \rho^2 = \frac{(\alpha^2 - b^2)^2}{a^2 b^2} (\alpha^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta),$$

qui représente le lieu cherché.

Mais en multipliant (3) avec l'équation de (1) en coordonnées polaires,

$$\rho_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta},$$

on a

$$\rho \rho_1 = a^2 - b^2.$$

On en conclut que les courbes (1) et (3) sont transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques.

Le même calcul, appliqué à la parabole $y^2 - 2px = 0$, donne pour résultante la parabole

$$y^2 = 2p(p - x),$$

qui n'est autre que la proposée retournée du côté des x négatives, et dont le sommet est transporté au point

$$(y = 0, x = p).$$