

Note du rédacteur

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 18
(1899), p. 419-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__419_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE DU RÉDACTEUR.

Le théorème par lequel M. Fontené, dans l'article qui précède, a étendu à l'espace le théorème de Bellavitis sur le quadrangle plan, est susceptible d'une démonstration vectorielle. Il s'agit du théorème I. La démonstration suivante n'est pas celle à laquelle l'Auteur fait allusion à la fin du n° 7; il m'a paru plus facile d'établir les formules (4) du n° 1.

Soient A, B, C, A', B', C' les vecteurs BC, CA, AB, DA, DB, DC dans le tétraèdre $ABCD$; $a, b, c, \dots$ seront les longueurs de ces vecteurs.

Le triangle LMN de l'énoncé a pour côtés aa', bb', cc' ; les

cosinus de ses angles seront donc

$$\frac{b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - a^2 a'^2}{2 b c b' c'} \dots;$$

d'autre part, l'angle résultant défini par l'énoncé est celui du rapport géométrique $\frac{B}{C}, \frac{B'}{C'}$, comme on le voit aisément,

ou $\frac{1}{c^2 c'^2} \cdot C.B.C'.B'$; tout se réduit donc à étudier l'angle de $C.B.C'.B'$, donnée par

$$\frac{\mathfrak{S} C.B.C'.B'}{c b c' b'} = \cos \alpha.$$

Or on a

$$\begin{aligned} C.B.C'.B' &= C.B(A' + B)(A' + C) \\ &= C.B.A'^2 + C.B.A'.C + C.B^2.A' + C.B^2.C, \\ (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}(C.B.C'.B') = -a'^2 \mathfrak{S}(C.B) - c^2 \mathfrak{S}(B.A') \\ \quad \quad \quad - b^2 \mathfrak{S}(C.A') + b^2 c^2, \end{array} \right. \end{aligned}$$

à cause de la formule connue

$$\mathfrak{S}(P.Q.R.T) = \mathfrak{S}(P.Q)\mathfrak{S}(R.T) - \mathfrak{S}(P.R)\mathfrak{S}(Q.T) + \mathfrak{S}(P.T)\mathfrak{S}(Q.R),$$

qui réduit $\mathfrak{S}(C.B.A'.C)$ à $C^2 \mathfrak{S}(B.A')$ ou $-c^2 \mathfrak{S}(B.A')$.

Mais l'inspection de la figure donne

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(C.B) &= -\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, & \mathfrak{S}(B.A') &= \frac{b^2 + a'^2 - c^2}{2}, \\ \mathfrak{S}(C.A') &= \frac{c^2 + a'^2 - b^2}{2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathfrak{S}(C.B.C'.B') = \frac{b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - a^2 a'^2}{2},$$

ce qui démontre la proposition.

On en déduit les théorèmes sphériques II, III, IV, les théorèmes plans analogues, et les conséquences de ces théorèmes plans données dans la seconde Partie. C.-A. LAISANT.