

E. LACOUR

Sur l'équation d'Euler : $\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}}$

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 18
(1899), p. 293-300

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18_293_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18_293_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H2cβ]

SUR L'ÉQUATION D'EULER :

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}};$$

PAR M. E. LACOUR,

Professeur adjoint à l'Université de Nancy.

1. Expliquons d'abord sur un exemple simple la méthode qui sera employée pour l'équation d'Euler.

Considérons un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox, Oy ; un point M de ce cercle est défini par l'angle φ que fait le rayon OM avec Ox , ou encore par la valeur du paramètre $t = \tan \frac{\varphi}{2}$. Prenons sur le cercle deux points M et M_1 , correspondant à des angles φ et φ_1 et à des valeurs t et t_1 du paramètre t , puis écrivons que la droite MM_1 est tangente à un cercle ayant pour centre le point O et pour rayon une longueur arbitraire ρ .

La relation entre t et t_1 ainsi obtenue est évidemment équivalente à la suivante :

$$\varphi_1 - \varphi = \alpha,$$

α étant une constante convenablement choisie; elle doit donc conduire, quand on la différentie, à l'équation différentielle

$$\frac{dt_1}{1+t_1^2} - \frac{dt}{1+t^2} = 0,$$

et, comme l'équation finie entre t et t_1 contient une constante arbitraire, ρ , c'est l'intégrale générale de l'équation différentielle du premier ordre considérée.

La vérification de ces résultats est immédiate. L'équation de la droite MM_1 est :

$$x(1 - tt_1) + y(t + t_1) = 1 + tt_1,$$

si l'on suppose que le rayon du cercle donné a été pris pour unité. La condition pour que cette droite soit tangente à un cercle de centre O et de rayon ρ est

$$\frac{(1 - tt_1)^2 + (t + t_1)^2}{(1 + tt_1)^2} = \frac{1}{\rho^2},$$

ou encore

$$\frac{(t_1 - t)^2}{(1 + tt_1)^2} = \frac{1 - \rho^2}{\rho^2}.$$

Elle peut s'écrire

$$\frac{t_1 - t}{1 + tt_1} = \text{const.}$$

et elle donne, par différentiation,

$$-(1 + t_1^2)dt + (1 + t^2)dt_1 = 0.$$

On a donc ainsi une méthode géométrique pour intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dt}{1 + t^2} = \frac{dt_1}{1 + t_1^2}.$$

2. Considérons maintenant la conique (S) définie par les équations

$$(S) \quad X = x^2, \quad Y = 2x, \quad (Y^2 - 4X = 0),$$

où x désigne un paramètre variable, et écrivons que la droite joignant les points M et M_1 de cette conique est tangente à une conique fixe (Σ)

$$(\Sigma) \quad au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

On trouve ainsi une équation doublement quadratique et symétrique entre les paramètres x et x_1 des points M et M_1 .

Le premier membre de cette équation, ordonné successivement par rapport à x_1 et par rapport à x , peut s'écrire

$$F(x, x_1) = Ax_1^2 + 2Bx_1 + C \equiv A_1x^2 + 2B_1x + C_1 = 0 :$$

A, B, C sont des fonctions quadratiques de x , et A_1, B_1, C_1 les mêmes fonctions de x_1 .

Si l'on différentie cette équation, on trouve

$$(A_1x + B_1) dx + (Ax_1 + B) dx_1 = 0 ;$$

puis, en tenant compte de la relation entre x et x_1 ,

$$\sqrt{B_1^2 - A_1C_1} dx + \sqrt{B^2 - AC} dx_1 = 0 ;$$

enfin, en posant

$$\Psi(x) = B^2 - AC,$$

on trouve

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}}.$$

Le polynôme $\Psi(x)$ est du quatrième degré en x et l'on passe du premier terme au second en remplaçant x par x_1 .

Cette équation différentielle du premier ordre se nomme une *équation d'Euler* et l'on voit que, la conique (S) étant donnée, une conique (Σ) conduit à une intégrale particulière d'une équation d'Euler définie par le polynôme

$$\Psi(x) = B^2 - AC.$$

3. Cela posé, la question à résoudre est la suivante :

Le polynôme $\Psi(x)$ étant *donné*, savoir

$$\Psi(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

et la conique (S) étant définie comme plus haut, déterminer la conique enveloppe (Σ) de façon que l'équation d'Euler correspondant à (Σ) soit précisément

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}}.$$

On va voir que le problème ainsi posé est possible et que la solution dépend d'une constante arbitraire.

Pour cela, il suffit d'interpréter géométriquement l'équation

$$\Psi(x) \equiv B^2 - AC = 0.$$

Cette équation, du quatrième degré en x , donne les valeurs de x pour chacune desquelles les deux valeurs correspondantes de x_1 sont confondues, c'est-à-dire elle détermine les points de (S) tels que les deux tangentes menées de l'un de ces points à la conique (Σ) sont confondues ou enfin les points où (S) est rencontrée par (Σ).

Quand $\Psi(x)$ est donné, la conique (Σ) est assujettie à la condition de couper (S) aux quatre points définis par l'équation

$$\Psi(x) \equiv a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0.$$

On trouve facilement ⁽¹⁾ que l'équation générale des coniques (Σ) satisfaisant à cette condition est

$$a_0 X^2 + 2 a_1 XY + a_2 Y^2 + 2 a_2 X + 2 a_3 Y + a_4 + \lambda(Y^2 - 4X) = 0.$$

La conique (Σ) étant ainsi déterminée, pour avoir l'équation biquadratique entre x et x_1 , il faut prendre l'équation tangentielle de (Σ) et écrire que cette équation tangentielle est vérifiée par les coordonnées de la droite

$$X - \frac{(x + x_1)}{2} Y + x x_1 = 0$$

qui joint les points de paramètres x et x_1 .

⁽¹⁾ Voir *Représentation géométrique des covariants d'une forme biquadratique* (Nouvelles Annales, p. 341; 1898).

On trouve de cette façon l'équation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 + \lambda & a_3 & -\frac{x+x_1}{2} \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 & xx_1 \\ 1 & -\frac{x+x_1}{2} & xx_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui contient une constante arbitraire λ . C'est l'intégrale générale de l'équation différentielle *donnée*, savoir

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}},$$

où

$$\Psi(x) \equiv a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4.$$

Cette forme d'intégrale a été donnée par Stieljes (*Bulletin des Sciences mathématiques*, année 1888, p. 222). Si l'on développe le déterminant et si l'on cherche à mettre en évidence des invariants et des covariants du polynome du quatrième degré $\Psi(x)$, on trouve

$$\left(\frac{1}{12}S - \lambda^2\right)(x-y)^2 + \lambda \Psi_x^y + H_x^y = 0.$$

Dans cette équation, S désigne l'invariant

$$S = a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2,$$

Ψ_x^y est une polaire de $\Psi(x)$, savoir

$$\begin{aligned} \Psi_x^y &\equiv y^2(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) \\ &\quad + 2y(a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3) + (a_2 x^2 + 2a_3 x + a_4) \\ &\equiv \frac{1}{12}(y^2 \Psi_{x^2}'' + 2yt \Psi_{xt}'' + t^2 \Psi_{t^2}'') \end{aligned}$$

(t désignant la variable d'homogénéité), H_x^y se déduit du Hessien $H(x)$ comme Ψ_x^y se déduit de $\Psi(x)$ et

$$\begin{aligned} H(x) &= (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3 \\ &\quad + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x^2 \\ &\quad - 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)x + (a_2 a_4 - a_3^2). \end{aligned}$$

4. Le discriminant de (Σ)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda \\ a_1 & a_2 + \lambda & a_3 \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

développé est

$$- (4\lambda^3 - S\lambda - T),$$

S et T désignant les invariants de $\Psi(x)$; c'est le premier membre de l'équation canonisante relative au polynome du quatrième degré $\Psi(x)$. Quand λ annule ce discriminant, la conique (Σ) correspondante se réduit à deux droites; le premier membre de son équation tangentielle est le carré du premier membre de l'équation tangentielle du point double.

Donc quand λ est racine de l'équation canonisante

$$4\lambda^3 - S\lambda - T = 0,$$

le premier membre de l'équation biquadratique en x et y devient le carré d'une expression bilinéaire en x et y . La relation considérée est alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 1 \\ a_1 & a_2 + \lambda & \frac{x + y}{2} \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & xy \end{vmatrix}^2 = 0.$$

5. Cas particulier où $\Psi(x) \equiv 4x^3 - g_2x - g_3$. —

Il suffit dans les résultats précédents de faire

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3}g_2, \quad a_4 = -g_3;$$

l'équation canonisante devient

$$4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation d'Euler correspondante

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}},$$

est

$$\lambda^2(x-y)^2 + \lambda \Psi_x^y + \Pi(x, y),$$

où

$$\begin{aligned}\Psi_x^y &= (2xy - \tfrac{1}{2}g_2)(x+y) - g_3, \\ \Pi(x, y) &= (xy + \tfrac{1}{4}g_2)^2 + g_3(x+y).\end{aligned}$$

Désignons par e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation canonisante

$$4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 = 0.$$

Lorsque l'on remplace, dans la relation biquadratique entre x et y , λ par l'une de ces racines, e_1 par exemple, nous savons que le premier membre devient le carré d'une fonction bilinéaire de x et de y . En développant les calculs dans ce cas particulier et en tenant compte de l'identité

$$4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 \equiv 4(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3),$$

on trouve que la relation bilinéaire entre x et y , qui correspond à $\lambda = e_1$, est

$$(x - e_1)(y - e_1) = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3).$$

6. La relation biquadratique entre x et y , qui contient au second degré la constante λ , peut être considérée comme une formule d'addition pour la fonction $p(u; g_2, g_3)$ dont les invariants g_2 et g_3 sont liés d'une manière convenable aux invariants du polynôme biquadratique $\Psi(x)$.

Dans le cas particulier considéré au n° 3, si l'on pose

$$x = p(u; g_2, g_3), \quad y = p(u_1; g_2, g_3),$$

l'équation du deuxième degré en λ

$$\lambda^2(x-y)^2 + \lambda \Psi_x^y + \Pi(x, y)$$

admet comme racine

$$p(u - u_1) \quad \text{et} \quad p(u + u_1) :$$

on le vérifie immédiatement en se reportant aux formules qui donnent

$$p(u - u_1) + p(u + u_1) \quad \text{et} \quad p(u - u_1)p(u + u_1).$$

Dans le cas général, si l'on relie les invariants de la fonction elliptique aux invariants S et T de $\Psi(x)$ par les égalités

$$g_2 = \tau^3 S, \quad g_3 = \tau^6 T,$$

où τ désigne un facteur de proportionnalité, et si l'on définit un argument v par les égalités

$$\frac{1}{\tau^2} p v = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \quad \frac{1}{\tau^3} p' v = \frac{a_3 a_0^2 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3}{\sqrt{a_0^3}},$$

enfin si l'on fait correspondre à x un argument u et à y un argument u_1 par les formules

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\sqrt{a_0}} (a_0 x + a_1) &= \frac{1}{2} \frac{p' u - p' v}{p u - p v}, \\ \frac{\tau}{\sqrt{a_0}} (a_0 y - a_1) &= \frac{1}{2} \frac{p' u_1 - p' v}{p u_1 - p v}, \end{aligned}$$

les racines de l'équation du second degré en λ sont

$$\frac{1}{\tau^2} p(u - u_1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau^2} p(u + u_1 + v).$$

Ces résultats se rattachent de très près à l'inversion de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}};$$

nous renverrons pour leur démonstration dans le cas général au *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen, 2^e Volume, pages 356 et 360.