

GENESE

Sur quelques intégrales

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 18
(1899), p. 273-274

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__273_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C2e]

SUR QUELQUES INTEGRALES;

PAR M. le Professeur GENESE,
De l'Université du Pays de Galles

Dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, édition de 1873, p. 260, l'auteur dit :

« En posant

$$u = x \sin x + \cos x, \quad v = \sin x - x \cos x,$$

on n'a aucun procédé pour trouver directement

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \frac{v}{u}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$
$$\int \frac{bx^2 dx}{(au + bv)^2} = -\frac{u}{au + bv}.$$

Nous pourrions encore citer, en désignant toujours par a et b des constantes, cette intégrale

$$\int \frac{a \, dx}{[a + (ax + b) \tan x]^2} = \frac{\tan x}{a + (ax + b) \tan x},$$

dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation. »

Voici comment on peut combler la lacune :

En posant $\theta = x - \arctan x$, on a

$$d\theta = \frac{x^2 \, dx}{1 + x^2}, \quad \cos \theta = \cos x \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + \sin x \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$$

alors

$$\sec^2 \theta \, d\theta = \frac{x^2 \, dx}{(\cos x + x \sin x)^2};$$

et la première intégrale égale

$$\tan \theta = \frac{\tan x - x}{1 + x \tan x} = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

En outre

$$\sin \theta = \sin x \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} - \cos x \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

et la seconde intégrale est

$$\int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = -\cot \theta.$$

La troisième se change en

$$\int \frac{b \, d\theta}{(a \cos \theta + b \sin \theta)^2} = \int \frac{b \, d \tan \theta}{(a + b \tan \theta)^2} = -\frac{1}{a + b \tan \theta}, \dots$$

La quatrième ne présente absolument pas de difficulté.

L'intégrale est

$$\begin{aligned} \int \frac{a \cot^2 x \, dx}{(a \cot x + ax + b)^2} &= \int \frac{-a \, d(\cot x + x)}{(a \cot x + ax + b)^2} \\ &= \frac{1}{a \cot x + ax + b}. \end{aligned}$$
