

E.-M. LÉMERAY

Sur la convergence des substitutions uniformes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 75-80

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__75_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H11] [J4a]

SUR LA CONVERGENCE DES SUBSTITUTIONS UNIFORMES;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

Dans un article précédent ⁽¹⁾ j'ai étudié la convergence de la substitution

$$x, fx$$

⁽¹⁾ Voir p. 306; 1897.

vers une racine a de l'équation $fx - x = 0$, quand la fonction donnée fx est holomorphe dans le voisinage du point a , et quand la dérivée $\frac{dfx}{dx}$ prend en ce point une valeur dont le module est 1, et l'argument $\frac{2k\pi}{n}$, k étant plus petit que n et premier avec lui. J'ai montré qu'alors les n premières dérivées de la différence $f^n x - x$ sont nulles pour $x = a$ et que, en supposant la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de cette même différence non égale à 0 pour $x = a$, il existe, dans un cercle infiniment petit décrit autour du point a , n secteurs de convergence et n secteurs de divergence pour la substitution proposée; ces secteurs ont tous même amplitude et alternent entre eux.

Considérons, à présent, le cas où la première dérivée de la différence $f^n x - x$, qui ne s'annule pas en a , est d'ordre $m+1$, m étant nécessairement plus grand que n ; les m premières dérivées de $f^n x - x$ étant des fonctions que l'on sait former des m premières dérivées de $fx - x$, le fait se produira s'il existe entre ces dernières certaines relations convenables. Considérons la fonction $y_n = f^n x$; comme elle peut se mettre sous la forme

$$y_n - a = x - a + \frac{A_{m+1}}{(m+1)!} (x - a)^{m+1} + \dots,$$

nous pourrions répéter les raisonnements de notre première étude et nous trouverions, autour du point a , non plus n , mais m secteurs de convergence pour la substitution $x, f^n x$; pour obtenir ceux de la substitution proposée, il suffit de remarquer que, lorsque, à une distance très petite de a , on passe de la fonction $f^p x$ à la fonction $f^{p+1} x$, l'argument de la dérivée de la dernière diffère très peu de celui de la dérivée de la première augmenté de $\frac{2k\pi}{n}$. Pour obtenir les secteurs de

convergence de x, fx , on fera tourner ceux de $x, f^n x$, dans le sens négatif, d'un angle égal à $\frac{2(n-1)k\pi}{n}$.

Pour que les secteurs de convergence d'une substitution $x, f^q x$ soient les mêmes que ceux de $x, f^n x$, il faut et il suffit que l'angle $\frac{2(n-q)k\pi}{n}$ soit un multiple de $\frac{2k\pi}{m}$; c'est-à-dire

$$mq \equiv 0 \pmod{n}.$$

Si n et m étaient premiers entre eux, un secteur de convergence pour une substitution ne le serait, du moins dans sa totalité, pour aucune autre. Si n et m admettaient un plus grand diviseur commun d , la valeur $\frac{n}{d}$ de q satisferait à la condition ci-dessus, et les secteurs de convergence pour $x, f^n x$ le seraient aussi pour les substitutions

$$x, f^{i\frac{n}{d}} x \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

mais pour celles-là seulement.

Or les deux dernières hypothèses sont inadmissibles et m est toujours multiple de n . En effet, considérons la suite des diverses itératives

$$x, fx, f^2x, \dots;$$

pour une valeur donnée de x , ou il y a convergence, ou il y a divergence (écartons le cas où après n itérations on retomberait exactement sur la valeur initiale). Supposons, par exemple, le cas de la convergence, et considérons la suite des itératives

$$x, f^p x, f^{2p} x, \dots;$$

en partant de la même valeur x que tout à l'heure, nous aurons convergence puisque ces itératives appartiennent elles-mêmes à la première suite; il est donc impossible

d'admettre qu'un secteur de convergence pour une substitution ne le soit pas dans sa totalité pour une autre quelconque; m est donc toujours multiple de n , on est ainsi amené à ce théorème :

Soit a un point-racine de l'équation $fx - x = 0$, fx étant holomorphe dans le voisinage de a ; désignons par f^n la $n^{\text{ième}}$ itérative de fx , par p un multiple de n , par $a_1, a_2, \dots$ les valeurs que prennent en a les dérivées de fx par rapport à x ; par $A_1, A_2, \dots$ les valeurs que prennent en a les dérivées de $f^n x - x$ par rapport à la même variable, et supposons qu'il existe entre les a_i des relations telles que les p quantités $A_1, A_2, \dots, A_p$ soient nulles; cela posé, si l'on assujettit les a_i à satisfaire à une nouvelle condition choisie de telle sorte que l'on ait $A_{p+1} = 0$, on a aussi $A_{p+2} = 0, A_{p+3} = 0, \dots, A_{p+n} = 0$; autrement dit $\frac{p}{n}$ relations convenables sont nécessaires et suffisantes pour que les p premières dérivées de $f^n x - x$ soient nulles pour $x = a$.

Il serait désirable de démontrer directement ce théorème qu'il est d'ailleurs facile de vérifier.

Ainsi, pour $n = 2$, la relation

$$a_1 + 1 = 0$$

entraîne

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0.$$

Jointe à la précédente, la relation

$$3a_2^2 + 2a_3 = 0$$

entraîne

$$A_3 = 0, \quad A_4 = 0.$$

Jointe aux deux précédentes, la relation

$$2a_3 + 15a_2a_4 - 30a_2^2 = 0,$$

entraîne à son tour

$$A_5 = 0, \quad A_6 = 0, \quad \dots$$

Pour $n = 3$, la relation

$$a_1 = e^{\pm \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$$

entraîne

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0.$$

Jointe à la précédente, la relation

$$(-3a_4 + 15a_2^3 + 2a_2a_3) + e^{\pm \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}(-3a_4 + 3a_2^3 - 14a_2a_3) = 0$$

entraîne

$$A_4 = 0, \quad A_5 = 0, \quad A_6 = 0, \quad \dots$$

Serret a montré (*Algèbre supérieure*) que la fonction

$$y = 2 \cos \frac{\pi}{n} - \frac{1}{x}$$

satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f^n x - x = 0.$$

Toutes les dérivées de $f^n x - x$ sont nulles au point-racine et d'ailleurs, en tout point, les coefficients de $\frac{x^i}{i!}$, dans le développement de cette fonction, satisfont aux conditions sus-énoncées.

Si une fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f^n x - x = 0,$$

pour une valeur quelconque de x il ne saurait, par définition, exister ni convergence, ni divergence, puisque après n itérations on retombe sur la valeur initiale; c'est ce que montre aussi notre analyse; la $n^{\text{ième}}$ itérative ayant pour valeur x , la première dérivée de $f^n x - x$, différente de zéro, est d'ordre infini; il y a donc une infinité de secteurs de convergence et de secteurs de divergence infiniment petits, et alternant; on ne peut

donc plus dire que x soit pris dans un secteur de convergence ou dans un secteur de divergence.

A part ce cas, nous arrivons donc, comme dans notre première étude, à trouver, autour du point a et dans un cercle infiniment petit, deux aires de convergence et de divergence de même surface. Il se peut qu'un secteur de divergence fasse partie d'une région de convergence à distance finie, cette région aboutissant finalement à un secteur de convergence; c'est ce qui se passe pour la fonction

$$y = a + \sqrt[p-1]{\frac{C(x-a)^{p-1}}{C+(x-a)^{p-1}}}$$

dont nous nous sommes déjà servi ⁽¹⁾ et qu'a employée aussi M. Leau, dans sa thèse si intéressante ⁽²⁾. Nos résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 16 novembre 1896 et le 31 mai 1897.